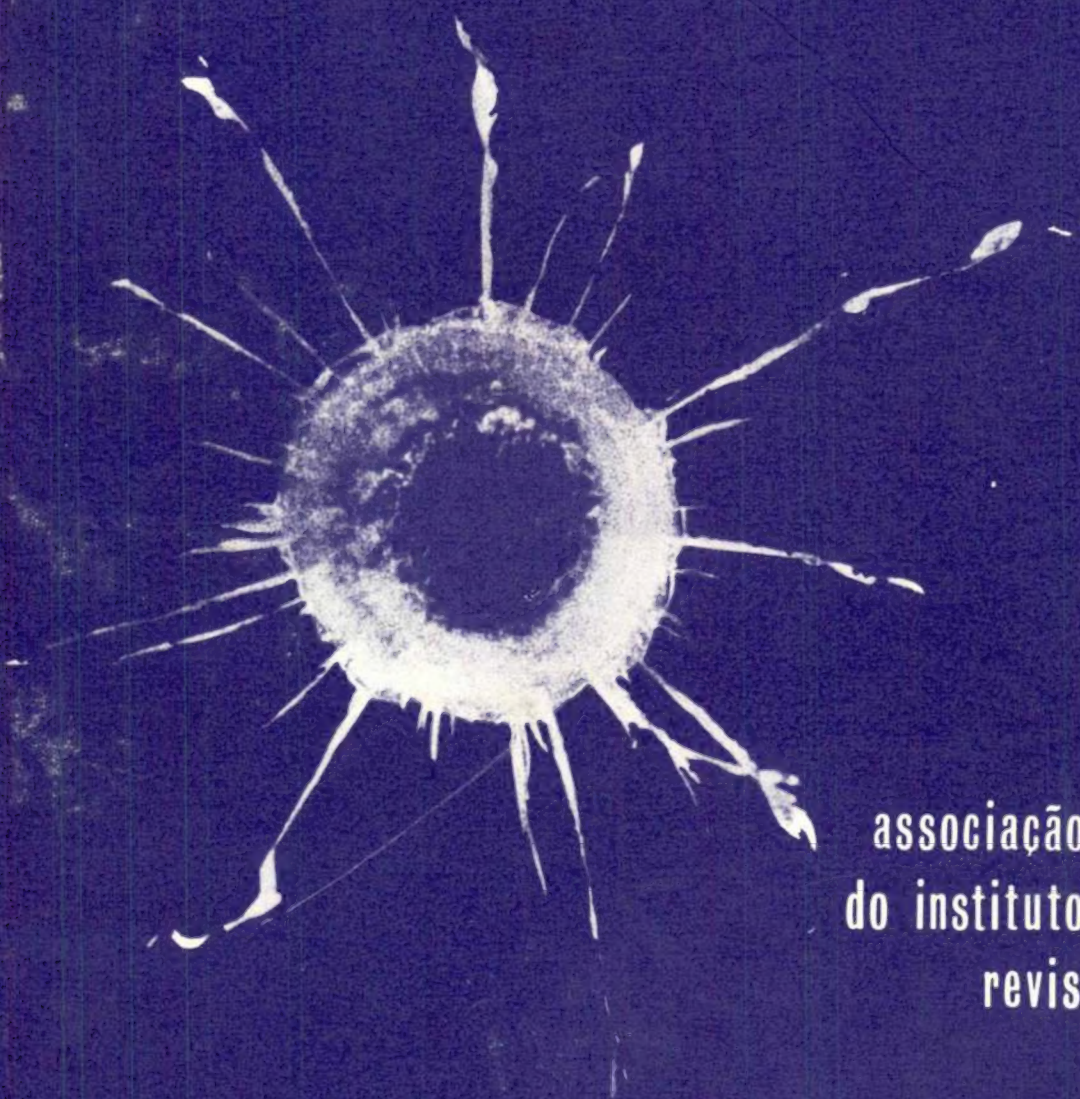
técnica



associação dos estudantes
do instituto superior técnico
revista de engenharia
dezembro 1972

418

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

S. A. R. L.

SEDE

Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO

TELEFONES: 2 76 76/9 e 2 18 38

DELEGAÇÃO

Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA

TELEFONES: 53 11 81/7 e 53 33 33

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO

●

A UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA, S. A. R. L. distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal, (cerca de 3 500 km) energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

COBERTURAS

Asnas em betão post-esforçado de diversos tipos para coberturas revestidas com lajes, telha, fibrocimento ou alumínio.

A mais vasta gama em pré-fabricados de betão

Pavimentos, coberturas, asnas, perfis especiais, post-esforço "Losinger", pontões, vigas de grande vão, pórticos "Crendon", pavimento "Trief", protecção de segurança "Trief", mosaicos, tubos, blocos "Leca", estacas para vinhas e pomares, espaçadores de betão e pré-fabricação total ou parcial.

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda.

Sede: Av. Est. Unidos da América, 100-5.º Dt. - Lisboa-5
Telefones - Serviços Administrativos: 77 48 32 / 77 29 53
Serviços Técnicos: 71 41 16/7/8 - 71 93 31/2

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telefs. 228824/5

Escritório:

Av. Conselheiro Fernando de Sousa, 19, 18.º piso

LISBOA 1 Telef. 65 54 31

técnica

NÚMERO 418 DEZEMBRO DE 1972 ANO XLVII VOLUME XXXV PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
José Toscano

CHEFE DE REDACÇÃO
Francisco Pedroso

ADMINISTRADOR
José de Oliveira Paulo

SECRETÁRIO
José António Bonfim

REDACTORES
António José Diogo, Carlos Oliveira Costa, José Sá da Costa, José Simões, Maria João Loureiro da Costa, Maria Teresa Lemos, Rogério Pinto

CONSELHO REDACTORIAL
A. Ferreira dos Santos, A. Rocha Trindade, A. Romão Dias, Aquiles Gomes, Carlos Rosmaninho, Domingos Moura, F. Sousa Marques, H. Nunes Garcia, J. Borges da Silva, J. Brazão Farinha, J. P. Figanier, L. Aires - Barros, L. Borges Teixeira

DIRECÇÃO, REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO
Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 73 15 49

PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.

★

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas	95$00	180$.
Ultramar, Brasil Espanha	100$00	190$.
Estrangeiro	—	200$.
Número avulso ...	—	25$.

Não se publica em Agosto e Setembro

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

★

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO NA
MOVIGRÁFICA
Rua do Espírito Santo, 19 - A Odivelas

SUMÁRIO

111 — EDUARDO ROMANO DE ARANTES E OLIVEIRA — *Teoremas de convergência nos métodos variacionais.*
Convergence theorems in variational methods.

117 — F. MACHADO e M. E. CORTE REAL — *Sobre a Reologia de areias.*
On the rheology of sandy materials.

125 — MARIA OLINDA BRAGA — *Microscopia quantitativa de clínqueres e cimentos portland.*
Quantitative microscopy of clinkers and portland cements.

137 — ANTÓNIO LEITE — *Nota sobre condições de rendimento máximo duma turbina isentrópica.*
Note on maximum total to static efficiency of an isentropic axial turbine stage.

143 — C. DINIS DA GAMA — *O Laboratório de Fotografia a ultra-alta velocidade da Universidade de Luanda.*
The ultra-high speed photography laboratory at the University of Luanda.

149 — CLEMENTE PEDRO NUNES — *Interpreting sieve analyses of products of industrial crystallizers.*
Interpretação de análises granulométricas dos produtos de cristalizadores industriais.

BIBLIOGRAFIA

CAPA — A fotografia a alta velocidade é hoje em dia um processo científico de grande interesse, utilizado nos domínios da Biologia e da Física. Neste número, apresenta-se uma breve descrição dos trabalhos que têm sido desenvolvidos neste campo pelo Laboratório de Fotografia a Ultra-Alta Velocidade da Universidade de Luanda.

INDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

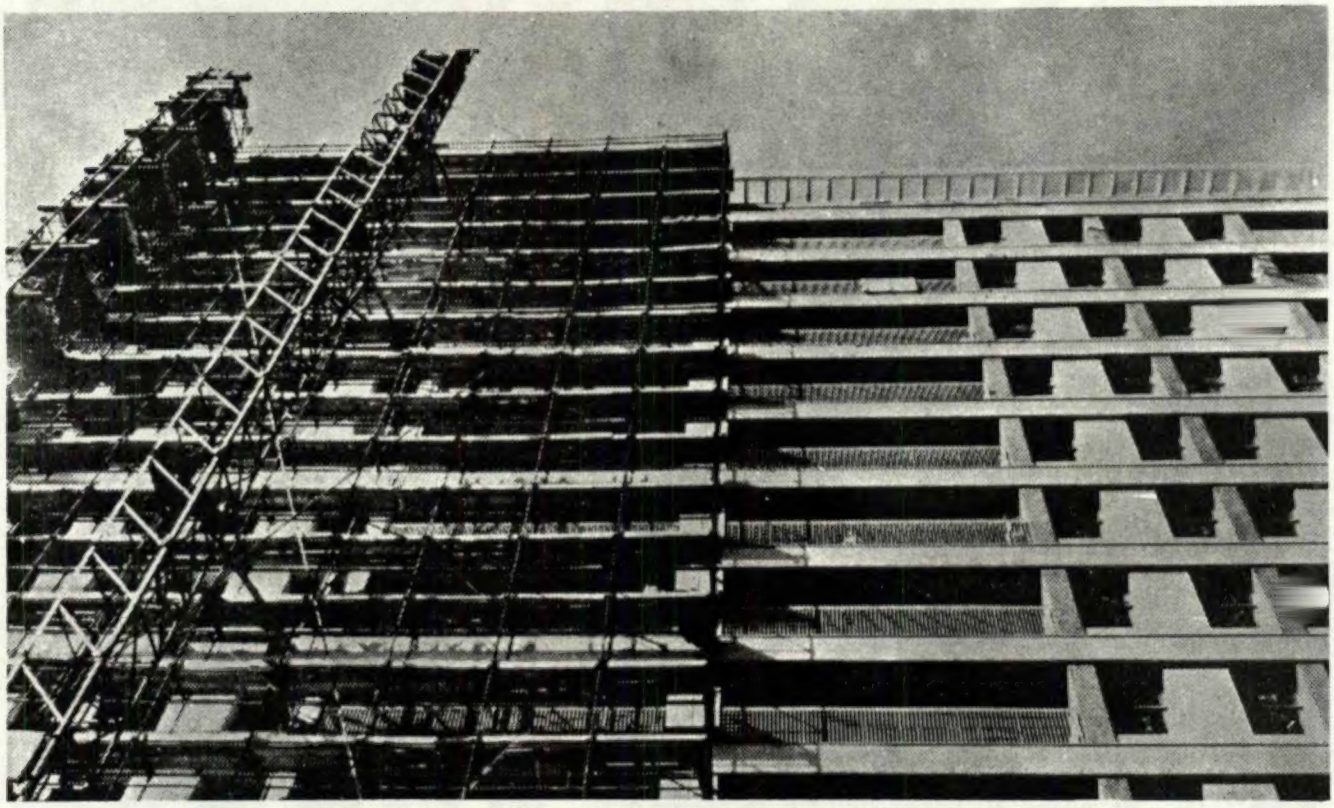
	Pág.
Argilex	XXVI
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Cometna	XXIII
Construções Técnicas	XIX
Construções Schréder	XXI
EFACEC	XII
Eficex Kienzle	IV
Electrotécnicos Reunidos	XV
Electro-Arco, Lda.	XVII
Empresa de Cimentos de Leiria	X
Empresa Electro Cerâmica	XXVI
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Guedes & Almeida, Lda.	IV e VIII
Harker Sumner	XX
Heliaço	2.ª da capa
H. Hagen, Lda.	XXII
Hidrel	XIV
Isolux	XXII
J. F. Azevedo e Silva	VII
Johann Keller	VI
Jomatel	XXIV
J. Roma	XVII
Lecabetão	XXIV
Livros Técnicos	V
MAGUE	XIII
Mendes de Almeida	XIV
Mesucora 73	XVII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Plessey Automática Eléctrica	XIV
Romar	XXV
SEPSA	
Soc. Electricidade Brown Boveri	4.ª da capa
Soc. Industrial Metalúrgica	XXIII
Sociedade Portuguesa Cavan	XIV
S. K. F. Lda.	XVIII
SOLIDAL	II
Sondagens e Fundações A. Cavaco	V
Sondagens Ródio, Lda.	VI
Sopecate	XXIII
Standard Eléctrica	IX
União Eléctrica Portuguesa	2.ª da capa
Wild Portugal, Lda.	III

Colaboraram neste número as seguintes Agências de Publicidade:

P. G. SEELOW & ASSOCIADOS, LDA., PUBLIMPAR, SÉRIO, ESTÚDIO TÉCNICO DE PUBLICIDADE, SUIÇO-PORTUGUÊS

espiral

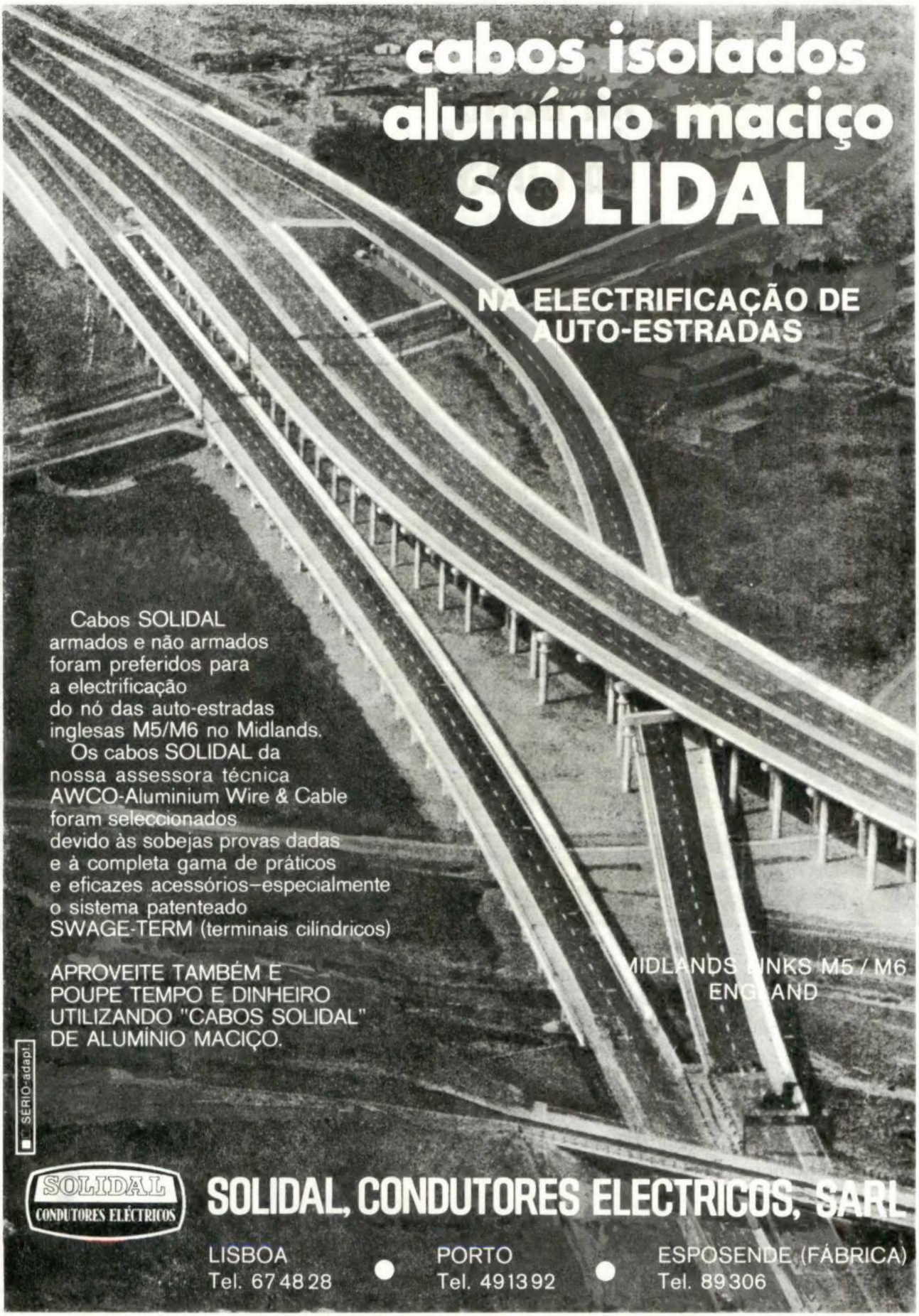
na base da construção moderna: estacas FRANKI, moldadas no solo.

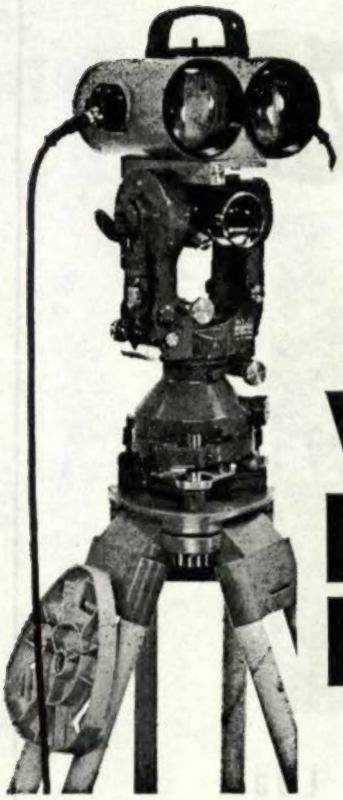


A elevada gama de diâmetros das estacas Franki permite a melhor adaptação a cada problema concreto de fundações, desde a construção mais ligeira até à de grande concentração de cargas muito elevadas. Material permanentemente actualizado e pessoal com especialização constantemente aprofundada garantem a segurança, rapidez e economia das fundações executadas.

FRANKI

Consulte-nos: FUNDAÇÕES FRANKI, LDA. — PORTUGAL


cabos isolados
alumínio maciço
SOLIDAL
NA ELECTRIFICAÇÃO DE
AUTO-ESTRADAS
Cabos SOLIDAL
armados e não armados
foram preferidos para
a electrificação
do nó das auto-estradas
inglesas M5/M6 no Midlands.
Os cabos SOLIDAL da
nossa assessora técnica
AWCO-Aluminium Wire & Cable
foram seleccionados
devido às sobejas provas dadas
e à completa gama de práticos
e eficazes acessórios–especialmente
o sistema patenteado
SWAGE-TERM (terminais cilíndricos)
APROVEITE TAMBÉM E
POUPE TEMPO E DINHEIRO
UTILIZANDO "CABOS SOLIDAL"
DE ALUMÍNIO MACIÇO.
MIDLANDS LINKS M5 / M6
ENGLAND
SÉRIO-adap!
SOLIDAL
CONDUTORES ELÉCTRICOS
SOLIDAL, CONDUTORES ELECTRICOS, SARL
LISBOA
Tel. 67 48 28
PORTO
Tel. 491392
ESPOSENDE (FÁBRICA)
Tel. 89306



Agora

para distâncias

até 2000 m

WILD DISTOMAT DI 10

O mais recente modelo do único aparelho de medição de distâncias, por infra-vermelhos, em serviço desde 3 anos, permite alcance até 2000 m e é adaptável aos teodolitos WILD T1A, T16 e T2.

Esta combinação é a ideal para poligonações, levantamentos por radiação e para implantações.

Economiza	**tempo, trabalho, dinheiro**
Aumenta	**precisão, rendimento, lucro**
Aprovado	**desde 3 anos em toda a parte do mundo**
Garantido	**pelos nossos serviços técnicos**

WILD
HEERBRUGG

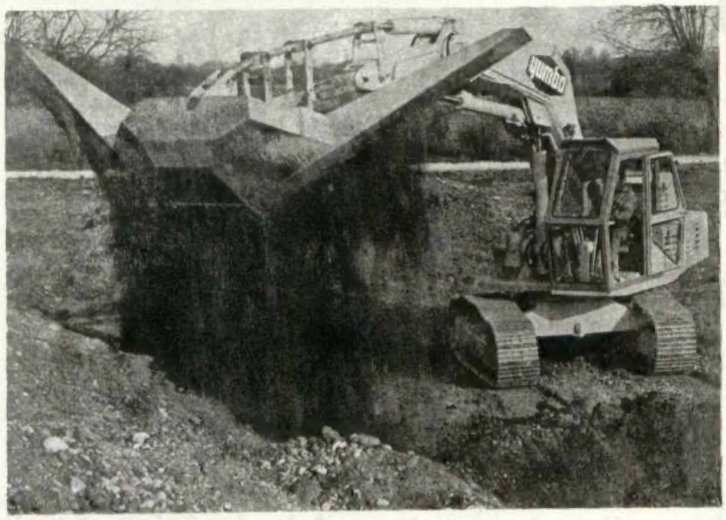
Solicitem prospecto detalhado ou demonstração aos representantes exclusivos

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8 * TEL. 68 91 12 * LISBOA-2

ESCAVADORAS HIDRÁULICAS
S/RODAS — S/LAGARTAS

— ENTREGAS IMEDIATAS



DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDAL - Guedes & Almeida, Lda.

R. ÁUREA, 181-2.º • LISBOA-2 • TEL. 32 50 80

R. ALFREDO CUNHA, 538 • MATOSINHOS • TEL. 93 45 62

CALCULAR...

...instantâneamente, silenciosamente, com economia e segurança.

...programa de calculadores electrónicos de CASIO COMPUTER, Co. LTD TÓKYO-JAPÃO

...diversos modelos com as mais evoluídas características para toda a espécie de cálculos.

Demonstrações sem compromisso

- 12 Modelos diferentes.
- 1 Programável.

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

EFICEX KIENZLE LISBOA: Av. João XXI, 4A-tels 727028-727019

DISTRIBUIDORES NO NORTE:

HORBELDA PORTO: Rua Faria Guimarães, 105 - tel. 4 33 46

Dimensionamento de Secções de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

— Flexão simples de secções rectangulares simplesmente armadas
— Flexão simples de secções rectangulares duplamente armadas
a) com armadura de compressão reduzida
b) com armadura de tracção reduzida
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Compressão simples
— Flexão composta de secções rectangulares
a) com armadura simétrica
b) com armadura de tracção reduzida
c) com armadura de compressão reduzida
— Flexão composta desviada de secções rectangulares
— Flexão composta de secções em T
a) com armadura de tracção reduzida
b) comarmadura de compressão reduzida
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas
— Esforço transverso

Preço 150$00

Dimensionamento de Secções Circulares de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas

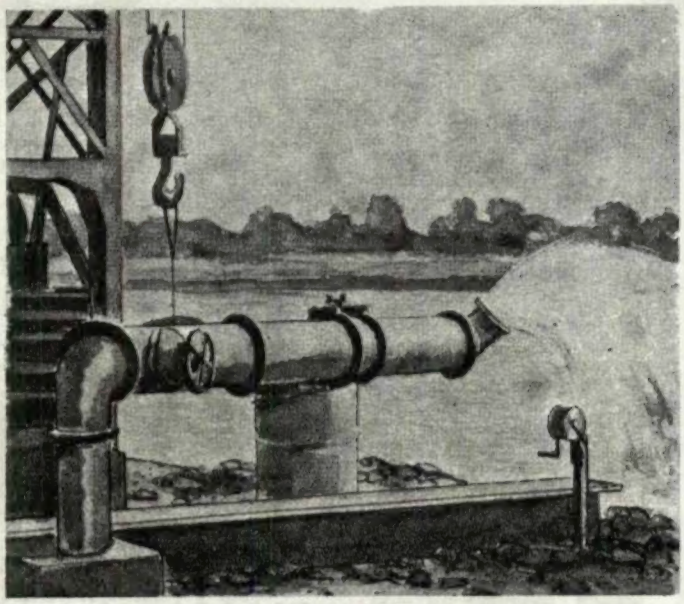
Preço 60$00

Por J. M. MADEIRA COSTA

ENG.º CIVIL

À venda na TÉCNICA e nas LIVRARIAS

Água: eis o que lhe oferecemos!



- Pesquisas e captações de água
- Estudos hidrogeológicos
- Sondagens e Fundações
- Rebaixamento de níveis aquíferos

ACAVACO

R. Rodrigo da Fonseca, 62, r. c-Esq. - Lisboa-1
Tel. 56 11 71/2/3/4

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

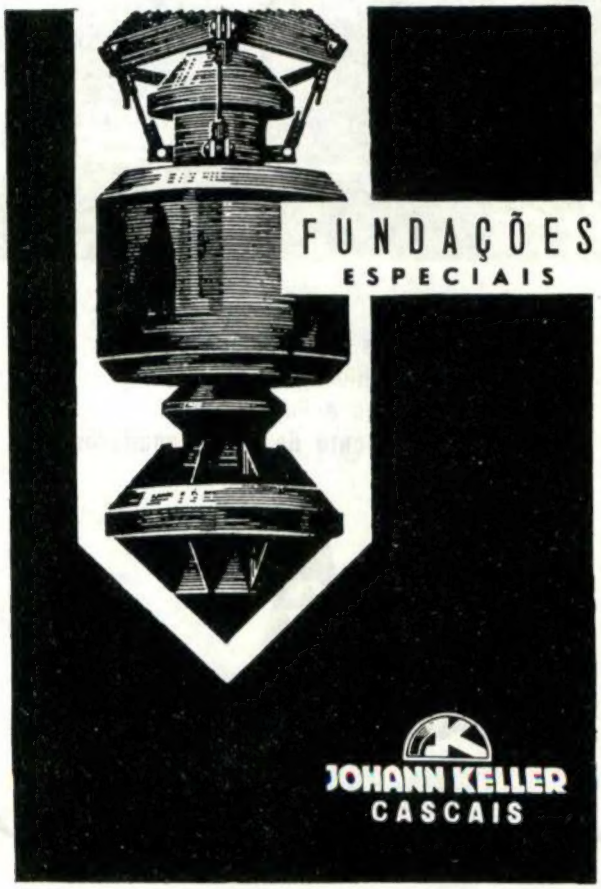
permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa

No Norte: **SCIAL** — R. António Feliciano de Castilho, 1126 — Telef. 97 09 32 — Areosa — Porto



SONDAGENS RODIO, LD.

R. S. Bento, 644 - 3.º
LISBOA

PORTO
LUANDA
BEIRA

TELEFONE: 68 80 96

SONDAGENS GEOLÓGICAS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CONSOLIDAÇÃO DE FUNDAÇÕES
ESTACAS
PAREDES CONTÍNUAS
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS HIDRÁULICAS
CAPTAÇÃO DE ÁGUAS

JF
hotel
madeira hilton
JF
J.F. DE AZEVEDO E SILVA & Cª Lda
Rua S. Francisco de Sales, 2-1º, Tel. 654165-Lisboa

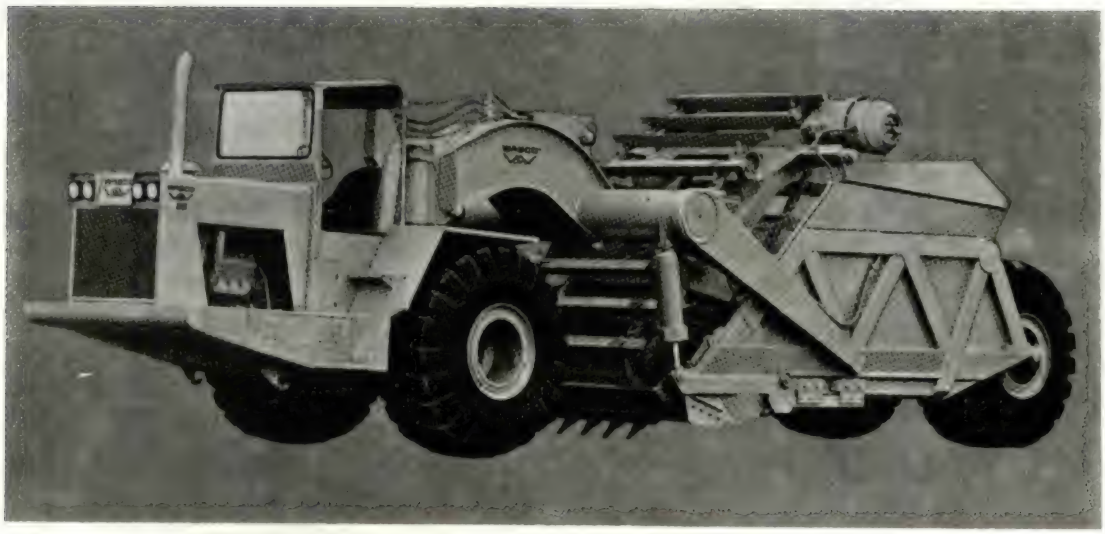
WABCO

An American-Standard Company

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADES ATÉ 34 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

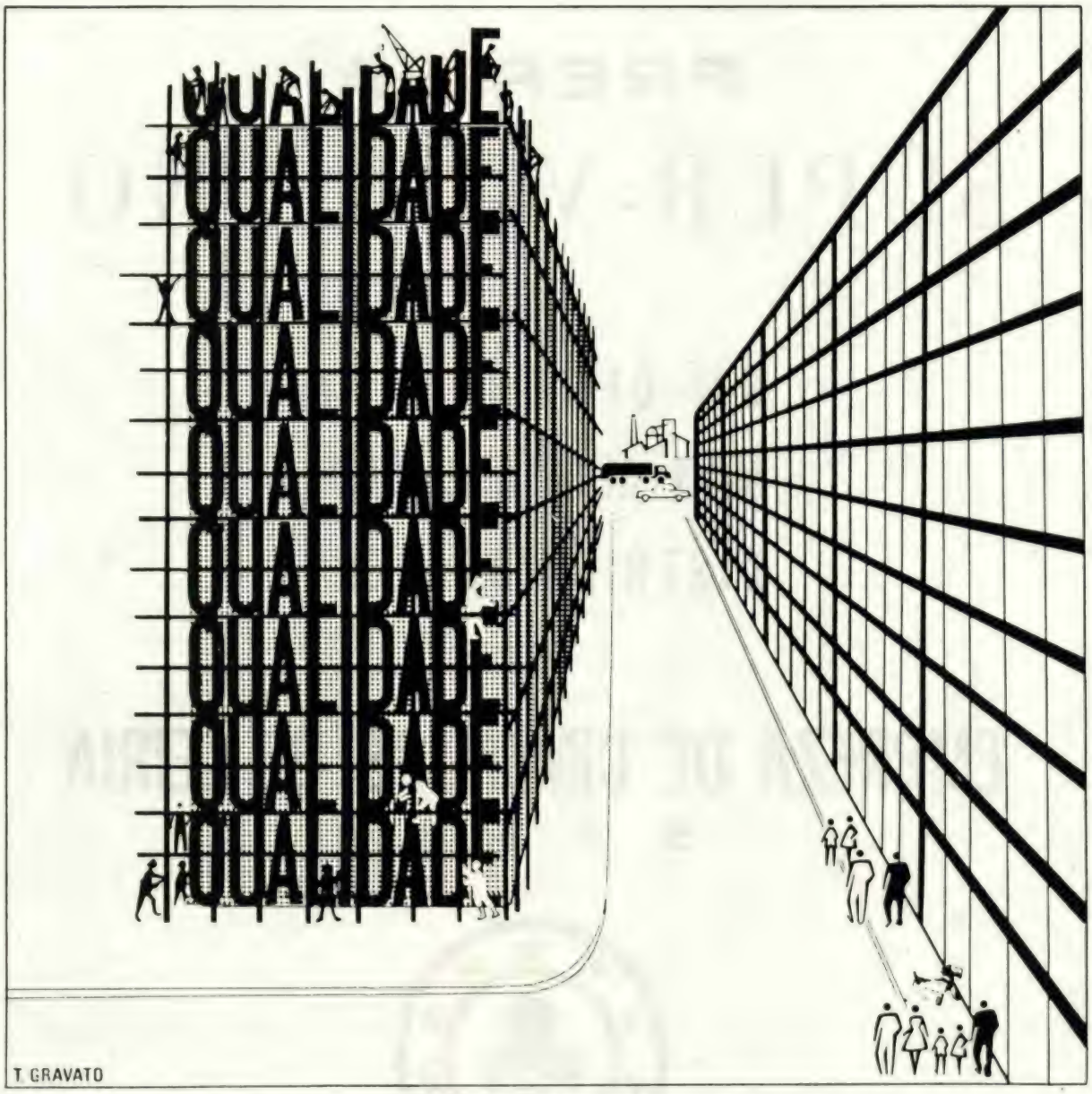


DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDAL - Guedes & Almeida, Lda.

R. ÁUREA, 181-2.° • LISBOA-2 • TEL. 32 50 80

R. ALFREDO CUNHA, 538 • MATOSINHOS • TEL. 93 45 62



O PRESTÍGIO CONSTROI-SE COM QUALIDADE

Não ... não nos dedicamos à construção civil ...
Somos a maior empresa portuguesa dedicada ao fabrico de material de telecomunicação e de electrónica.

A nossa gama de produtos é variadíssima: desde os minúsculos circuitos integrados e transistores até à mais complexa das centrais telefónicas para uso público

Sim! Todos estes produtos têm algo de comum: — a qualidade, base do prestígio do nosso nome.

Standard Eléctrica **ITT**

PREFIRA

SUPER-VULCANO

UM CIMENTO DA

MAIS ALTA QUALIDADE

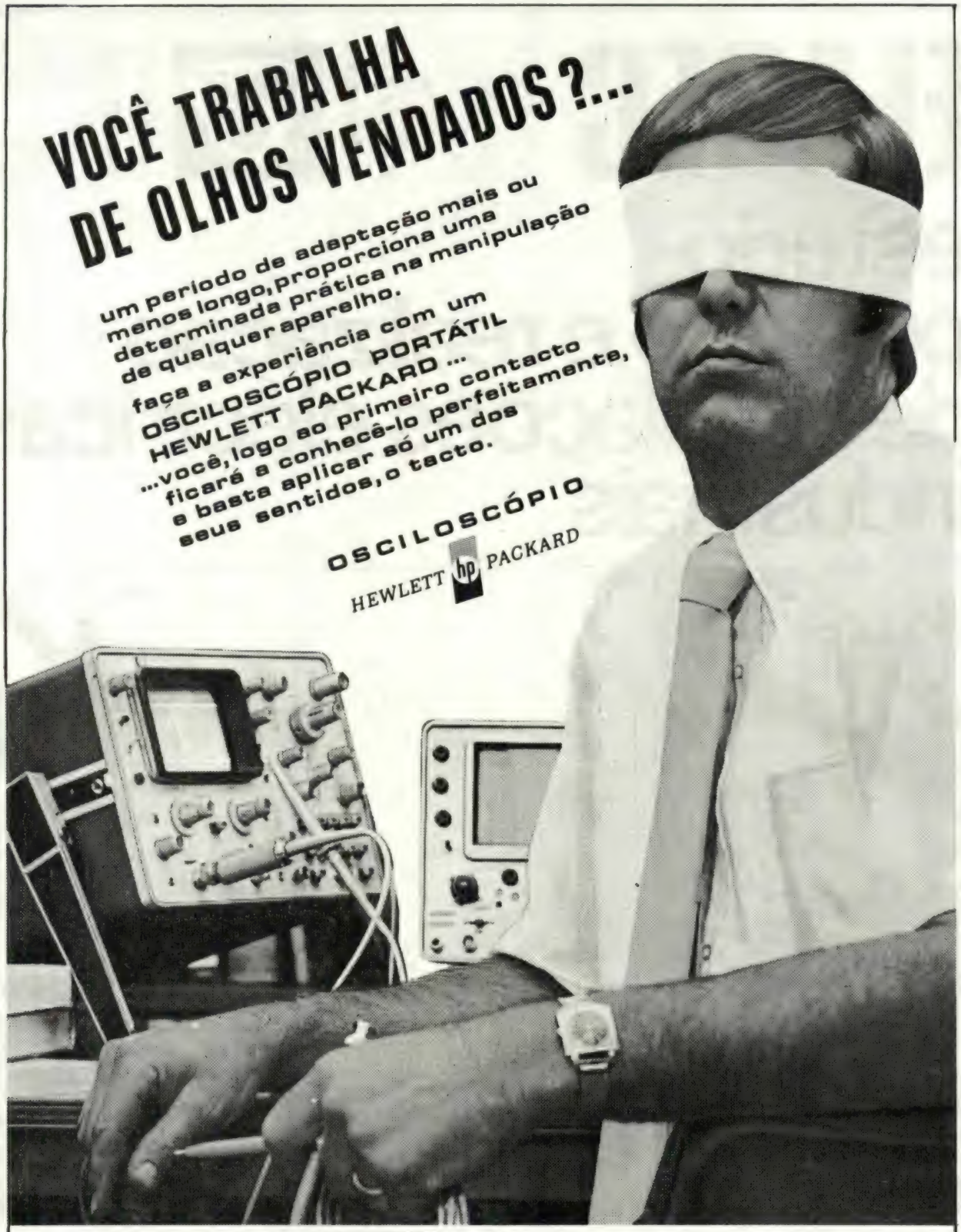
DISTRIBUÍDO PELA

EMPREZA DE CIMENTOS DE LEIRIA

S. A. R. L.

SÍMBOLO DE QUALIDADE

Sede: **Rua Braamcamp, 7 — LISBOA** Fábrica: **Maceira-Liz**



PEÇA INDICAÇÕES COMPLETAS A

TELECTRA

EMPRESA TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S. A. R. L.
R. Rodrigo da Fonseca, 103 - LISBOA
Telefones 68 60 72 / 3 / 4 / 5 - Telex 1598

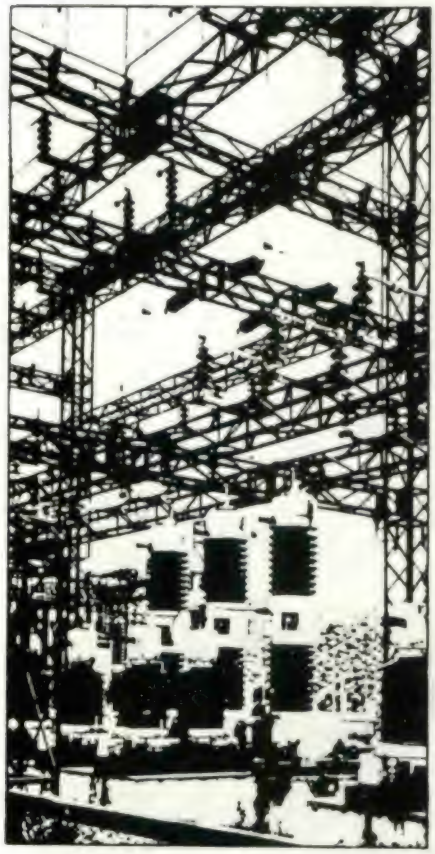
T2 72

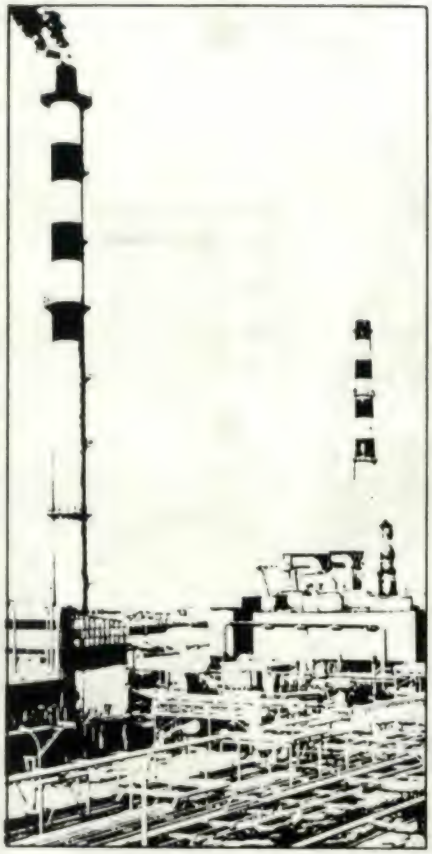
EFACEC

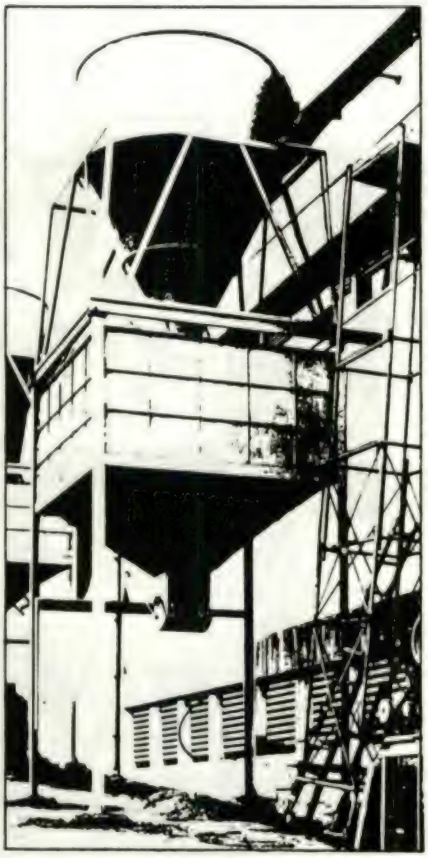
25 ANOS

1948
1973

estudo projecto e realização de instalações eléctricas industriais







EFACEC

A MAIOR ORGANIZAÇÃO DO PAÍS NO RAMO ELECTROTÉCNICO

técnica

NÚMERO 418 DEZEMBRO DE 1972 ANO XLVII VOLUME XXXV PUBLICAÇÃO MENSAL

C.D.U. — 519.34

TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA NOS MÉTODOS VARIACIONAIS (*)

EDUARDO ROMANO DE ARANTES E OLIVEIRA
Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico, Lisboa.

RESUMO

Apresenta-se uma teoria dos métodos variacionais a qual pressupõe a existência de um princípio de mínimo.

A solução exacta do problema variacional supõe-se pertencer a um espaço de Banach, X, onde cada elemento minimiza um determinado funcional numa certa classe de elementos.

Considera-se um operador que faz corresponder a cada elemento de X um elemento de um dos subespaços de X, o qual elemento se denomina aproximação do primeiro.

Enunciam-se e demonstram-se teoremas que estabelecem limites superiores para a distância de cada elemento X e a sua aproximação.

A teoria pode ser utilizada em situações mais gerais que a correspondente ao método de Ritz. Tem, muito especialmente, o interesse de permitir enquadrar os problemas de convergência do método dos elementos finitos.

SUMARY

A theory of variational methods is presented which supposes a minimum principle.

The exact solution of the variational problem is supposed to belong to a Banach space, X, where each element minimizes a certain functional on a certain class of elements.

An operator is considered which associates to each element of X an element belonging to a subspace of X. This element is called the aproximation of the first.

Theorems are stated and demonstrated which establish upper bounds for the distance between each element in X and its approximation.

The theory can be used in more general situations than the one corresponding to Ritz's method. It provides namely an ideal frame for analyzing convergence in the finite element technique.

1 — INTRODUÇÃO

Os problemas de Física Matemática reduzem-se geralmente ao da resolução de equações diferenciais às quais está muitas vezes associado um princípio variacional [1] que afirma que a solução relativa a certas condições de fronteira minimiza um certo funcional num espaço de funções.

Os métodos variacionais são justamente aqueles que substituem o problema da resolução da equação pelo da determinação do elemento que minimiza o funcional.

O presente trabalho considera o problema já na fase em que ele se apresenta como problema variacional. Estabelecem-se os teoremas gerais de aproximação e convergência relacionados com a redução do problema variacional inicial a outros problemas também variacionais mas de resolução eventualmente mais fácil.

2 — *Subconjuntos isocondicionados e isominimizantes*

Seja H um espaço de Hilbert real [2] e seja F uma família de funcionais contínuos definidos sobre H.

Supõe-se que cada funcional da família F admite um único elemento minimizante global num subespaço $H_c \subset H$, dito um subespaço condicionado de H, e numa classe de subconjuntos de H, chamados subconjuntos isocondicionados, cada um dos quais se obtém somando um elemento constante aos elementos de H_c.

(*) Comunicação apresentada nas 1.as Jornadas Matemáticas Luso-Espanholas, Lisboa, Abril de 1972. Trabalho subsidiado através do projecto TLE4 do Instituto de Alta Cultura.

Isto significa que cada subconjunto isocondicionado $C \subset H$, contém, para cada funcional F, um elemento s tal que

$$F(s) < F(c) \qquad (2.1)$$

sendo c um elemento arbitrário de C distinto de s.

Cada subconjunto isocondicionado C e o subespaço H_c são isométricos, o que assegura que cada elemento de C seja um ponto de acumulação [2] de C. É além disso evidente que o subespaço condicionado é um dos subconjuntos isocondicionados e que a união de todos estes é o espaço total H.

Considere-se agora, para cada funcional F da família $\mathcal{F}$, o conjunto de todos os elementos minimizantes contidos em todos os subconjuntos isocondicionados. Designa-se este novo subconjunto por subconjunto isominimizante correspondente a F. Supõe-se que a família $\mathcal{F}$ é tal que a união de todos os subconjuntos isominimizantes, correspondentes a todos os funcionais da família $\mathcal{F}$, coincide com o espaço todo, H. Cada ponto de H representa pois a intersecção de um subconjunto isocondicionado com um subconjunto isominimizante.

Dois elementos pertencentes ao mesmo subconjunto isominimizante dir-se-ão elementos isominimizantes. Dois elementos pertencentes ao mesmo subconjunto isocondicionado dir-se-ão elementos isocondicionados.

Os subconjuntos isocondicionados e isominimizantes supõem-se ortogonais [3]. Por isso, a intersecção de cada subconjunto isocondicionado com cada subconjunto isominimizante, que se supõe sempre não vazia, não pode conter mais de um elemento.

Considere-se agora um operador limitado e contínuo, T, com domínio H e contradomínio H', sendo H' um subespaço de H. A cada elemento de H corresponde um único elemento de H' mas a cada elemento de H' corresponderá em geral mais de um elemento de H. Supõe-se que a imagem de qualquer elemento de H pertencente a H' coincide consigo mesmo, isto é, que

$$T(e) = e \qquad \text{se } e \in H' \qquad (2.2)$$

Supõe-se ainda que podem definir-se em H' subconjuntos isocondicionados e isominimizantes, relativos à mesma família de funcionais $\mathcal{F}$, subconjuntos esses que gozam das mesmas propriedades que os subconjuntos homólogos em H.

As imagens dos elementos de cada subconjunto isocondicionado C de H supõem-se contidas num subconjunto isocondicionado de H', o qual se diz corresponder a C. Isto significa que as imagens de quaisquer dois elementos isocondicionados, *e* e *f*, de H são dois elementos isocondicionados, *e'* e *f'*, de H' (fig. 1), embora não sejam necessàriamente elementos isocondicionados de H. Se no entanto o forem, quaisquer que sejam *e* e *f*, o operador T diz conformante. (*)

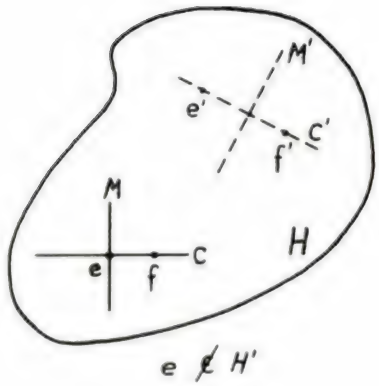


Fig. 1

É evidente que, se um dado elemento pertencer a H', então, em virtude de (2.2), coincidirá com a sua própria imagem. Estará pois contido simultâneamente em C e em C' (fig. 2).

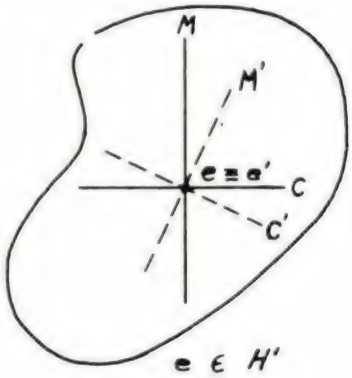


Fig. 2

Um certo subconjunto isominimizante M' de H' diz-se corresponder a um certo subconjunto isominimizante M de H se ambos corresponderem ao mesmo funcional, F.

Pode pois considerar-se um segundo operador, A, com domínio H e contradomínio H', o qual faz corresponder à intersecção de cada par de subconjuntos isocondicionados e isominimizantes de H a intersecção dos subconjuntos correspondentes em H'. Tendo em vista o que ficou estabelecido atrás, o operador A é também tal que

$$A(e) = e \qquad \text{se } e \in H' \qquad (2.3)$$

Exactamente como acontece com os subconjuntos isocondicionados, a intersecção de qualquer subconjunto isominimizante de H com o correspondente subconjunto isominimizante de H' é um elemento de H' que coincide com a própria imagem (fig. 2).

Sobre cada elemento de H' cruzam-se pois um subconjunto isocondicionado e um subconjunto isominimizante de H, e os subconjuntos correspondentes de H'.

(*) Esta designação é inspirada pela linguagem utilizada na teoria dos elementos finitos [4].

À A — imagem de e dá-se o nome de elemento aproximante ou aproximação de e em H'.

3 — *Os teoremas de aproximação*

Os teoremas de aproximação apresentam condições suficientes para que a aproximação de um dado elemento de H caia dentro de uma certa vizinhança do elemento.

Seja s o elemento minimizante único de F no subconjunto isocondicionado C de H. Seja s'_c o elemento minimizante único de F no subconjunto isocondicionado correspondente, C', de H'. s'_c é assim a aproximação de s.

Considere-se em primeiro lugar o seguinte lema:

Lema: «Dado um número positivo arbitrário δ, é possível determinar outro número positivo arbitrário δ' tal que, se c for um ponto contido em C e $F(c) - F(s) < \delta'$, a distância entre c e s será mais pequena que δ».

Considere-se com efeito uma esfera S_δ em C, com raio δ e centro s, e seja F_δ o valor mínimo que F toma no conjunto $C\text{-}S_\delta$, isto é na porção de C exterior à esfera. Em virtude de (2.1),

$$F_\delta - F(s) > 0 \tag{3.1}$$

Assim, dado qualquer ponto C tal que

$$F(c) < F_\delta \tag{3.2}$$

a distância d (s, c) entre s e c deve ser mais pequena que δ, o que significa que δ' pode ser igual a $F_\delta - F(s)$, isto é, que δ pode ser a diferença entre os valores mínimos tomados por F em C, fora e dentro da esfera S_δ.

Um segundo lema poderia ser imediatamente estabelecido adaptando o anterior ao espaço H'.

O primeiro teorema de aproximação é o seguinte:

«Dado um número positivo arbitràriamente pequeno, δ, é possível determinar um outro número positivo artitràriamente pequeno, ε, tal que, se

a) o operador T for conformante e C' estiver incluído em C,
b) existir um ponto $c' \in C'$ cuja distância a s seja menor que ε,
então a distância $d(s, s'_a)$ é menor que δ».

A figura 3 traduz gràficamente a situação.

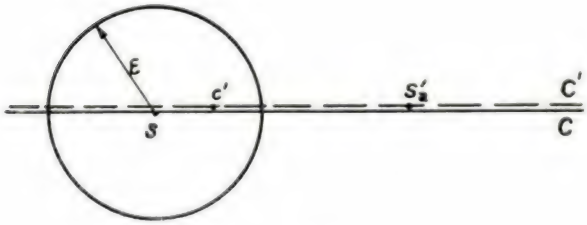


Fig. 3

Como $C' \subset C$ e $s'_a \in C'$,

$$F(s) \leqslant F(s'_a) \tag{3.3}$$

Como $c' \in C'$

$$F(s'_a) \leqslant F(c') \tag{3.4}$$

Em virtude da condição b),

$$d(s, c') < \varepsilon \tag{3.5}$$

Ora, como F é contínuo sobre H, é possível, dado um número positivo arbitràriamente pequeno, ε', determinar ε tal que (3.5) implique

$$|F(c') - F(s)| < \varepsilon' \tag{3.6}$$

Combinando (3.3) e (3.4), obtém-se

$$F(s) \leqslant F(s'_a) \leqslant F(c') \tag{3.7}$$

e, em virtude de (3.6),

$$F(s) \leqslant F(s'_a) \leqslant F(s) + \varepsilon' \tag{3.8}$$

o que implica

$$F(s'_a) - F(s) < \varepsilon' \tag{3.9}$$

Como s'_a pertence a C' e $C' \subset C$ é então possível, em virtude do Lema, determinar ε', e portanto ε, de tal modo que

$$d(s, s'_a) < \delta \tag{3.10}$$

Considere-se agora o segundo teorema de aproximação.

«Dado um número positivo arbitràriamente pequeno, δ, é possível determinar dois outros números positivos e arbitàriamente pequenos ε e ε' tais que, se:

a) existir um ponto $c' \in C'$ cuja distância a s seja menor que ε,
b) existir um ponto $c \in C$ cuja distância a s'_a seja menor que ε',
a distância entre s e s'_a é menor que δ».

A situação é descrita gràficamente pela fig. 4.

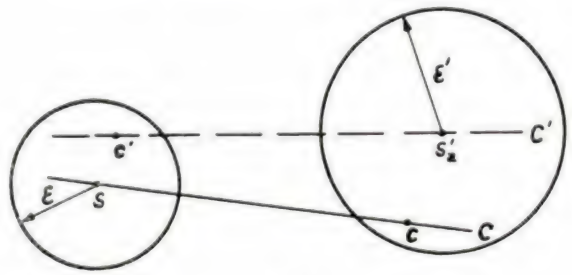


Fig. 4

Com efeito, como $c \in C$,

$$F(s) \leqslant F(c) \tag{3.11}$$

e, como $c' \in C'$,

$$F(s'_a) \leqslant F(c') \tag{3.12}$$

Em virtude das condições b) e c),

$$d(s, c') < \varepsilon \tag{3.13}$$

$$d(c, s'_a) < \varepsilon' \tag{3.14}$$

e, como F é um funcional contínuo sobre H, é possível escolher ε e ε' de tal modo que

$$F(s) = F(c') \pm \varepsilon'' \tag{3.15}$$

$$F(c) = F(s'_a) \pm \varepsilon''' \tag{3.16}$$

$$\varepsilon' < \delta \tag{3.17}$$

sendo ε'' e ε''' números positivos arbitràriamente pequenos.

Eliminando $F(s'_a)$ e $F(c')$ entre (3.12), (3.15) e (3.16), e usando (3.11), obtém-se

$$F(s) \leqslant F(c) \leqslant F(s) \pm \varepsilon''' \mp \varepsilon'' \tag{3.18}$$

e portanto

$$F(c) - F(s) < \varepsilon'' + \varepsilon''' \tag{3.19}$$

Em virtude do Lema, é pois possível determinar ε'' e ε''', e portanto ε e ε' tais que

$$d(c, s) < \delta - \varepsilon' \tag{3.20}$$

A desigualdade triangular permite então escrever:

$$d(s, s'_a) \leqslant d(c, s) + d(c, s'_a) \tag{3.21}$$

e portanto, em virtude de (3.14) e (3.20),

$$d(s, s'_a) < \delta \tag{3.22}$$

Nas aplicações destes teoremas, convém que o elemento que em ambos os teoremas se supõe existir na vizinhança ε do s seja a T — imagem de s, isto é, T (s).

Quanto ao elemento $c \in C$ que, no segundo teorema, se supõe localizado na vizinhança ε' de s, deve dizer-se que, na prática, não é fácil mostrar a sua existência.

Pode ser conveniente utilizar como elemento c um elemento s_a de C tal que $T(s_a) = s'_a$. Outra possibilidade consiste em tomar para elemento c a projecção p de s'_a sobre C (fig. 5), recorrendo ao seguinte teorema:

«Seja p a projecção de s'_a sobre C e p' a T — imagem de p em H'. Seja α a norma (suposta limitada) do operador A. Então, se $d(p, p') < \frac{\varepsilon'}{1+\alpha}$, a distância $d(s'_a, p)$ é menor que ε'».

Mostra a fig. 5 que p' e s'_a estão ambos em C'. p e q são projecções de s'_a e p' sobre C.

Pelo teorema de Pitágoras, válido para espaços de Hilbert;

$$[d(p, q)]^2 + [d(p' q)]^2 = [d(p, p')]^2 \leqslant \left(\frac{\varepsilon'}{1+\alpha}\right)^2 \tag{3.23}$$

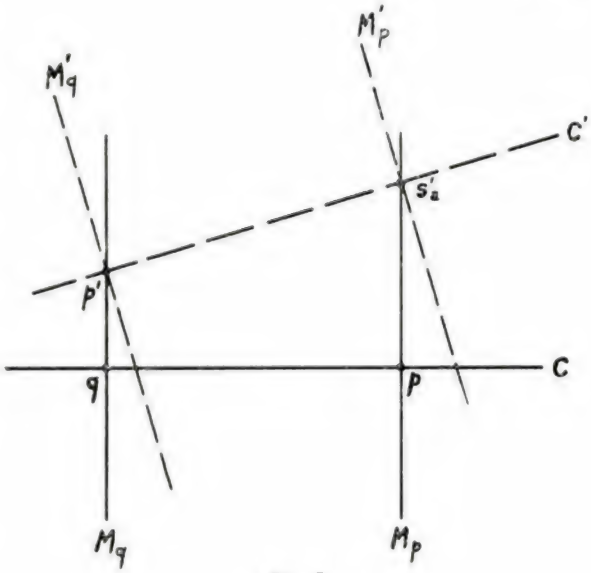


Fig. 5

Portanto,

$$d(p, q) < \frac{\varepsilon'}{1+\alpha} \tag{3.24}$$

Mas M_q e M'_q intersectam-se sobre o elemento p' que pertence a H'. Portanto, M'_q é o subconjunto isominimizante de H' que corresponde a M_q. O mesmo pode ser dito de M_p e M'_p, visto que eles se intersectam sobre s'_a.

Como, por outro lado, p' e s'_a estão contidos em C', que é o subconjunto isocondicionado de H' que corresponde a C, segue-se que p' e s'_a são as aproximações de q e p. Logo,

$$d(p', s'_a) < \alpha\, d(p, q) \tag{3.25}$$

sendo α a norma do operador A.

Ora

$$d(s'_a, p') \leqslant d(s'_a, p') + d(p, p') \tag{3.26}$$

e, portanto, em virtude de (3.24),

$$d(s'_a, p) < \varepsilon' \tag{3.27}$$

4 — *Convergência*

Consideram-se agora sucessões de operadores limitados e contínuos, $\{T_n\}$ e $\{A_n\}$. A cada termo destas sucessões corresponderá um subespaço $H'_n \subset H$ que é o contradomínio dos operadores T_n e A_n.

Uma sucessão de subconjuntos C'_n de um espaço métrico C diz-se completa, relativamente a um outro subconjunto S de C, se for possível determinar um inteiro positivo N tal que, para $n > N$, exista pelo menos um elemento de C'_n na vizinhança ε de cada elemento de S.

Os teoremas de convergência podem basear-se neste conceito geral de completidade. A discussão da convergência torna-se mais simples porém, em regra, se o elemento de C'_n que aproxima um dado elemento e de S for a sua própria T_n-imagem em H'.

O conceito de completidade que resulta de tomar para elementos aproximantes as imagens dos elementos de S é pois uma particularização do conceito geral de completidade, à qual pode dar-se o nome de T — completidade.

Uma sucessão de subconjuntos C'_n de C será assim chamada T — completa, relativamente a um outro subconjunto S de C, se, dado ε, for possível determinar N tal que, para $n > N$, a T_n — imagem de qualquer elemento e de S esteja contida na vizinhança ε de e, isto é, se:

$$d(e, T_n(e)) < \varepsilon \text{ para qualquer } e \in S \qquad (4.1)$$

É importante notar que uma sucessão T — completa será simplesmente completa, embora o contrário não se verifique necessàriamente.

Os teoremas de convergência podem ser enunciados com vários graus de generalidade, correspondentes a situações mais ou menos complexas.

Para cada grau aparecem dois teoremas, cada um dos quais se relaciona com os dois teoremas de aproximação da Secção anterior.

Na presente comunicação, limitar-nos-emos a considerar um único espaço H, uma única família F e um único elemento $e \in H$.

O primeiro teorema de aproximação dá então origem ao seguinte teorema de convergência:

«Se

a) os operadores T_n forem conformantes e $C'_n \subset C$ (condição de conformidade),

b) a sucessão $\{C'_n\}$ for completa relativamente a um subconjunto S de C que contenha s (condição de completidade),

então, $\{s'_{an}\}$ converge para s».

As condições a) e b) correspondem com efeito às condições a) e b) do primeiro teorema de aproximação, e não há portanto necessidade de comentários.

O segundo teorema de convergência, que resulta do segundo teorema de aproximação, é o seguinte:

«Se

a) a sucessão $\{C'_n\}$ for completa relativamente a um subconjunto S de C que contenha s,

b) $\{s'_{an}\}$ convergir para um elemento de S,

então $\{s'_{an}\}$ converge para s».

Também aqui não há necessidade de justificar. De acordo com o estabelecido na Secção anterior, a condição b) será verificada se a sucessão de elementos s_{an} tais que $T_n(s_{an}) = s'_{an}$ convergir para um elemento de S. Ou então, se a sucessão das projecções p_n dos elementos s'_{an} sobre C convergir para um elemento de S.

5 — *Discretização*

O problema da determinação de elementos aproximantes, simplifica-se extraordinàriamente se o operador T for tal que o subespaço H' tenha um número finito de dimensões. O problema variacional diz-se então discretizado.

Nesse caso, e se o operador for conformante, tem-se o método de Ritz, cuja convergência pode pois ser considerada à luz do primeiro teorema da Secção anterior.

Se o operador não for conformante, tem-se um método mais geral que o de Ritz. Trata-se de uma situação que aparece frequentemente quando a discretização se faz pela técnica dos elementos finitos [4, 5] que utiliza funções coordenadas definidas seccionalmente no domínio a que se refere o problema variacional. Serve então o segundo teorema.

6 — *Conclusões*

A teoria que acaba de ser apresentada corresponde a uma generalização das análises de convergência que, para o caso linear, têm sido apresentadas pelo autor em vários trabalhos dedicados ao método dos elementos finitos [5, 6] e à Teoria das Estruturas [7, 8] em geral.

O primeiro teorema de convergência pode considerar-se clássico, no sentido de que está, de certo modo, substancialmente incluído na teoria da convergência do método de Ritz[3].

Não assim o segundo teorema, o qual já permitiu mostrar que é possível conseguir convergência no método dos elementos finitos mesmo que se viole a condição da conformidade entre elementos, e explicar a razão por que, em certos casos, a convergência não chega a obter-se

A importância deste teorema é porém muito maior se se atender ao papel essencial que o conceito de convergência desempenha na justificação de teorias aproximadas e dos métodos de geração dessas teorias [7, 8].

Assim, na teoria das Estruturas, por exemplo, os teoremas de convergência levam a uma justificação dos métodos energéticos de estabelecimento das equações das teorias das peças laminares e lineares, métodos esses que, apesar da sua comodidade, têm sido olhados

com desconfiança, em virtude de aparecerem com carácter heurístico mais ou menos disfarçado. Mostrar-se-á num próximo trabalho como o segundo teorema de convergência pode ser utilizado na justificação da utilização desses métodos energéticos.

REFERÊNCIAS

[1] — Vainberg, M. M. — *Variational Methods for the study of Non — Linear Operators*. Holden Day, 1964.

[2] — Taylor, A. E. — *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley, 1958.

[3] — Mikhlin, S. G. — *Variational Methods of Mathematical Physics*. Pergamon Press, 1963.

[4] — Oden, J. T. — *Finite Element of Non-linear Continua*. Mc Graw-Hill, 1972.

[5] — Arantes e Oliveira, E. R. — «Theoretical Foundations of the Finite Element Method». Int. J. Solids Structures, Vol. 4, No. 10. October 1968, pp. 929-952.

[6] — Arantes e Oliveira, E. R. — «Completeness and Convergence in the Finite Element Method». Proc. 2nd. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics (AFFDL-TR-68-150), Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

[7] — Arantes e Oliveira, E. R. — «The Convergence Therems and their Role in the Theory of Structures». Proceedings of the IUTAM Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures, Liège, 1971.

[8] — Arantes e Oliveira, E. R. — Lições do Curso da NATO sobre «Elementos Finitos na Mecânica do Contínuo». Edição provisória do LNEC, Lisboa, 1971.

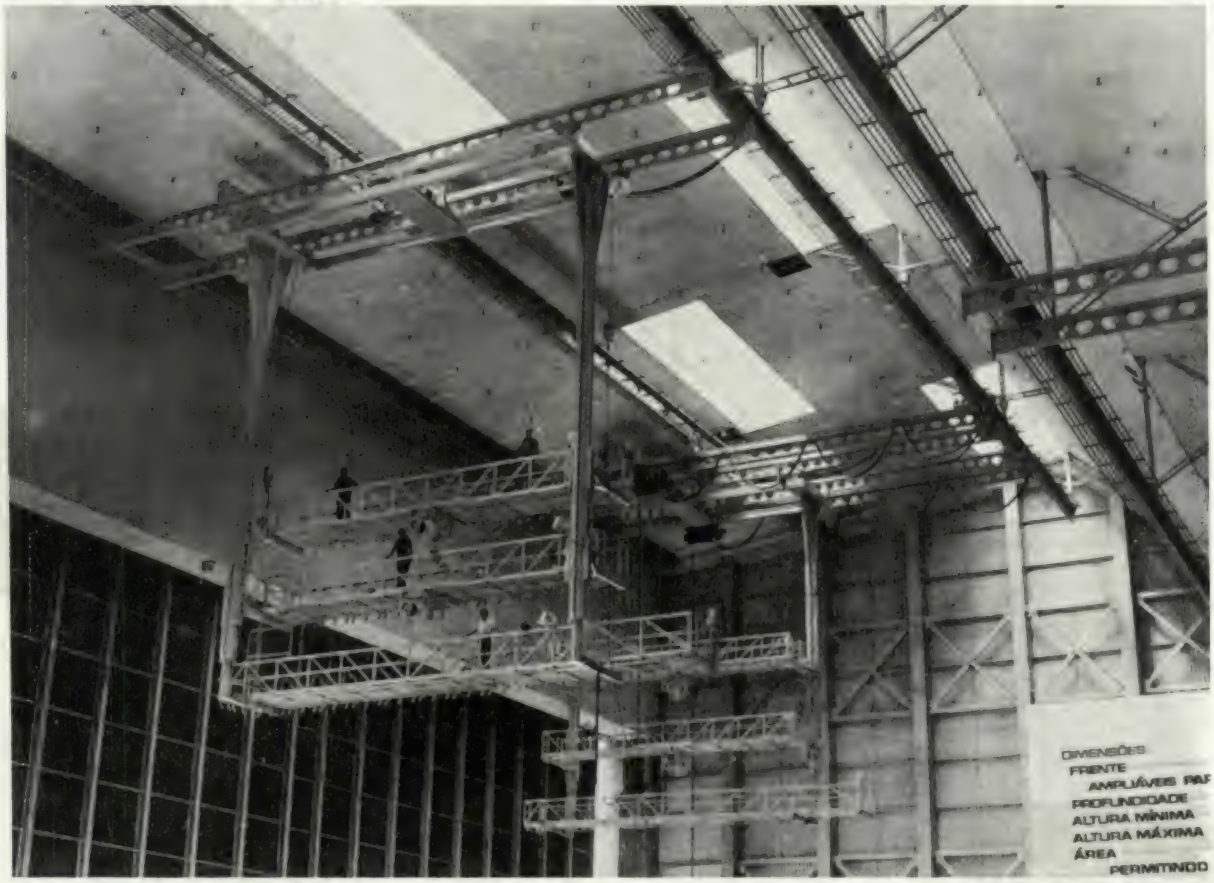
INII — Instituto Nacional de Investigação Industrial

Formação 72/73

Programas e Datas	Tema	Objectivos	Dirigido a:
DPE.33 — Psicologia Social e Técnicas de comunicação 12 a 16 de Março 35 horas	A empresa e os problemas da comunicação. Contribuição da psicologia social.	Mostrar a importância do fenómeno relacional nas empresas e chamar a atenção para os problemas globais que daí resultam.	Dirigentes e quadros superiores das empresas e dos serviços, nomeadamente os responsáveis pelos seus aspectos humanos.
SI.31 — Matemática e Estatística de Gestão Início em 12 de Março (3 sessões por semana em fins de tarde) 36 horas	As bases matemáticas da gestão da empresa.	Apresentar os principais instrumentos matemáticos e estatísticos que intervêm mais frequentemente na gestão.	Todos os quadros que exerçam funções de responsabilidade participando na preparação de decisões na sua organização.
SI.32 — Principios Gerais de Direcção 12 a 16 de Março 30 horas	Conceitos e noções fundamentais do management. Estratégia directiva e organização do pessoal dirigente.	Situar o participante na sua organização e na sociedade. Levá-lo a um melhor conhecimento das funções mais importantes da organização e da sua integração numa direcção eficiente. Desenvolver as aptidões de direcção e de trabalho em grupo.	Quadros intermédios na hierarquia das empresas ou sreviços, quadros com a dupla função de controlar os seus departamentos e de coordenar as suas actividades com as dos outros.
SEC.31 — A Organização de Empresas e de Estaleiros de Construção Civil 8 a 10 e 12 a 16 de Março 32 horas	A organização racional da indústria da construção civil.	Equacionar os problemas que as empresas e os estaleiros de construção civil enfrentam no domínio da organização científica e apontar vias para a sua solução.	Empresários, dirigentes e quadros técnicos das empresas da construção civil.

Para informações mais detalhadas sobre estas acções e respectivos programas, os interessados poderão dirigir-se ao INII — Divisão de Formação e Aperfeiçoamento, Rua Filipe Folque, 2, 6.º-D. — Lisboa-1 — Telefs. 53 36 20/3/4/5/6.

MAGUE



As 2 docas de acesso à deriva dos aviões Boeing 747 em funcionamento no Hangar nr. 6 da TAP (Aeroporto de Lisboa).

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

HIDREL

TÉCNICA DE HIDRÁULICA
E DE ELECTRICIDADE, LDA.

Grupos moto e electro-bomba
Grupos electro-bomba submersíveis
Grupos de eixo vertical «JOHNSTON»
Contadores para líquidos «LANGE»
Aparelhagem de medida «METRIMPEX»
Motores Eléctricos
Hidro-injectores
Válvulas e torneiras
Manómetros e Vacuómetros «HAENNI»
Rega por aspersão

ASSISTÊNCIA TÉCNICA

Rua do Alecrim, 47-A-B — Rua do Lumiar, 113
Telefs. 32 57 00 - 3 59 66 LISBOA Telef. 79 03 55

ETP 25

MERCEDES-BENZ

MOTORES
DIESEL

GRUPOS
ELECTROGÉNEOS
DE 14½ A 245 KVA

REPRESENTANTES
MENDES DE ALMEIDA, S.A.R.L.
ESCRITÓRIOS • ARMAZÉNS
OFICINAS • SALÃO DE VENDAS
AV. 24 DE JULHO, 54 A-G — LISBOA — TELEF. 66 77 94/8

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

A.E.P.

Plessey Automática Eléctrica Portuguesa
S. A. R. L.

Fabricante de Material Telefónico, Telecomunicações
e Sinalização de Trânsito

Administração, Fábrica e Escritórios:

Avenida Infante D. Henrique, 333 — Lisboa
Telefone 31 31 71

Apartado 1060 — Telegramas: PLESSEY
TELEX 1190 PAEP P

DELEGAÇÕES:

Norte — Rua Gonçalo Cristóvão, 140 - 2.º Esq.
Porto — Telef. 3 39 26 - 38 01 38

Angola — Avenida General Carmona, 70/70 - A
Luanda - Angola — Caixa Postal 6853
Telefone 2 36 21

Moçambique — Rua da Electricidade, 4
Lourenço Marques - Moçambique
Caixa Postal 2686, Telefone 2 56 18

C. D. U. 624.131.439:539.501

SOBRE A REOLOGIA DE AREIAS

F. MACHADO
(Dr. em Engenharia Civil, I.S.T.)

e M. E. CORTE-REAL
(Aluna de Eng.ª Electrotécnica, I.S.T.)

RESUMO

A partir da vibração em ressonância de tubos metálicos cheios com material granular, é possível determinar os parâmetros reológicos do enchimento. Um ensaio com uma areia de mármore mostrou que se pode atribuir a esta areia comportamento visco-elástico (corpo de Maxwell). O método parece aplicável a problemas de Mecânica dos Solos.

ABSTRACT

A method (based on resonant vibration) was developed for measuring the rheological constants of sandy material contained in small metallic pipes. A test on a marble sand showed that a viscoelastic behaviour (Maxwell body) can be ascribed to this material. The method is expected to be useful for some problems of Soil Mechanics.

1 — INTRODUÇÃO

A investigação do comportamento reológico de substâncias granulares foi iniciada com o fim de se conhecerem as propriedades do manto terrestre (que se supõe formado por rochas peridotíticas) quando sujeito a fusão parcial. O método usado interessa porém igualmente para o estudo reológico de qualquer areia.

As substâncias granulares têm propriedades que são, de certo modo, intermédias entre as dum sólido e as dum líquido, parecendo razoável admitir que o modelo reológico correspondente seja (pelo menos em primeira aproximação) o *corpo visco-elástico de Maxwell*. O facto terá naturalmente de ser confirmado pela experiência.

Uma substância visco-elástica é, como se sabe, definida pela relação (veja-se, por exemplo, *Jaeger*, 1956, p. 102)

$$\bar{\sigma} = \frac{2\eta\, d/dt}{1 + (\eta/\mu_M)\, d/dt}\, \bar{\varepsilon} \qquad (1)$$

onde $\bar{\sigma}$ e $\bar{\varepsilon}$ são os *tensores distorcionais* («deviators») respectivamente das tensões e das deformações, t é o tempo, η a viscosidade e μ_M a rigidez de Maxwell.

Num sólido elástico perfeito seria

$$\bar{\sigma} = 2\,\mu\,\bar{\varepsilon} \qquad (2)$$

sendo μ o módulo de rigidez habitual (módulo de elasticidade transversal).

Pode dizer-se portanto que num corpo de Maxwell o módulo de rigidez é substituído pelo operador

$$\mu = \frac{\eta\, d/dt}{1 + (\eta/\mu_M)\, d/dt} \qquad (3)$$

Por sua vez, para um líquido viscoso newtoniano seria

$$\bar{\sigma} = 2\,\eta\, d\bar{\varepsilon}/dt \qquad (4)$$

o que é equivalente agora ao operador

$$\mu = \eta\, d/dt \qquad (5)$$

Numa vibração em que $\bar{\sigma}$ e $\bar{\varepsilon}$ são ambos proporcionais à parte real de $e^{2\pi i t/\tau}$ (sendo τ o período), virá

$$d/dt = 2\,\pi\, i/\tau \qquad (6)$$

e as expressões (3) e (5) passam a escrever-se, respectivamente,

$$\mu = \frac{2\,\pi\, i\,\eta/\tau}{1 + 2\,\pi\, i\,\eta/\mu_M\,\tau} = \frac{\mu_M}{1 + \mu_M^2\,\tau^2/4\,\pi^2\,\eta^2}\left(1 + i\,\frac{\mu_M\,\tau}{2\,\pi\,\eta}\right) \qquad (7)$$

$$\mu = 2\,\pi\, i\,\eta/\tau \qquad (8)$$

As equações (2), (7) e (8) podem considerar-se casos particulares da expressão geral

$$\mu = \mu_o\,(1 + i/Q) \qquad (9)$$

onde μ_o é o módulo de rigidez (correspondente ao período considerado) e $1/Q$ é um coeficiente de amortecimento (Q é o chamado factor de qualidade em ressonância).

Para um sólido perfeito será

$$\mu_o = \mu \qquad 1/Q = 0 \tag{10}$$

para uma substância visco-elástica de Maxwell

$$\mu_o = \frac{\mu_M}{1 + \mu_M^2 \tau^2 / 4 \pi^2 \eta^2} \qquad \frac{1}{Q} = \frac{\mu_M \tau}{2 \pi \eta} \tag{11}$$

e para um líquido newtoniano

$$\mu_o = 0 \qquad 1/Q = \infty \quad \text{mas} \quad \mu_o / Q = 2 \pi \eta / \tau \tag{12}$$

É interessante notar que, na substância visco-elástica, quando o período de vibração for muito pequeno $1/Q$ é vizinho de zero e a substância comporta-se aproximadamente como sólido elástico de rigidez μ_M. Quando, pelo contrário, o período for muito grande μ_o aproxima-se de zero e $1/Q$ de infinito, mas o produto μ_o / Q conserva o valor finito $2 \pi \eta / \tau$, como sucede nos líquidos newtonianos. As substâncias visco-elásticas podem assim considerar-se corpos de tipo mais geral que incluem como casos extremos os sólidos elásticos (perfeitos) e os líquidos viscosos (newtonianos).

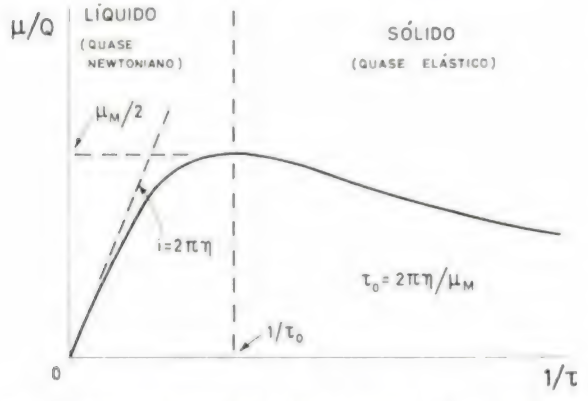


Fig. 1 — Variação teórica de μ/Q em função de $1/\tau$, para corpo de Maxwell

As considerações anteriores mostram haver interesse em representar a relação μ_o / Q como função de $1/\tau$ (Fig. 1). O máximo da curva estabelece, de certo modo, a separação entre o comportamento de líquido viscoso e o de sólido elástico. O período $\tau_o = 2 \pi \eta / \mu_M$ correspondente ao máximo coincide com o chamado tempo de relaxação.

Atendendo a (11), a grandeza $Q / \mu_o \tau$ é linear em $1/\tau^2$, o que facilita o ajustamento pelos mínimos quadrados, conforme se verá adiante (cf. Fig. 5). Na representação gráfica correspondente a ordenada na origem é $1/2 \pi \eta$ e o coeficiente angular da recta é $2 \pi \eta / \mu_M^2$.

Para esforços moderados, as imperfeições de elasticidade que afectam o módulo μ, não têm influência no módulo de compressão χ (módulo de elasticidade volumétrica dos sólidos elásticos). Nos problemas de vibrações, as soluções obtidas para um sólido perfeito (quando expressas nos módulos χ e μ) podem estender-se aos semi-sólidos fazendo a simples substituição indicada em (9). O método vai ser utilizado na secção seguinte.

2. TEORIA DA VIBRAÇÃO DE TUBOS

O dispositivo experimental para estudar a ressonância de barras vai indicado na Fig. 2 (veja-se, por

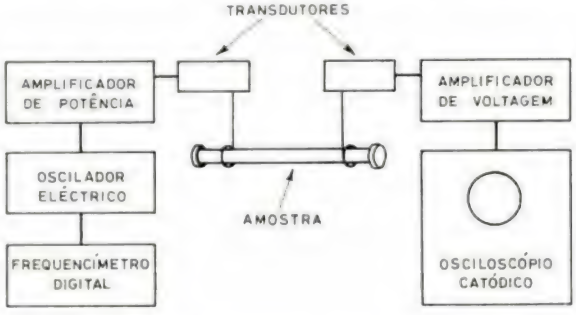


Fig. 2 — Esquema do equipamento usado nas medidas reológicas

exemplo, *Spinner & Tefft*, 1961). Uma oscilação eléctrica depois de amplificada é convertida em vibração e aplicada à amostra através de um dos fios de suspensão. O outro fio está ligado a um detector que transforma agora a vibração em oscilação eléctrica, a qual depois de amplificada vai aparecer no «écran» dum osciloscópio catódico.

Enrolando os dois fios em sentidos contrários, excitam-se não só vibrações forçadas em flexão, mas também em torção. Fazendo variar a frequência do oscilador, obtêm-se as várias ressonâncias (que se reconhecem por máximos da amplitude na imagem do osciloscópio). Estas frequências de ressonância são, como se sabe, pràticamente iguais às frequências de vibração livre da barra.

A fim de aumentar o rigor, a frequência ou o período da ocilação excitadora é medido num frequencímetro digital (Fig. 2).

No presente estudo há interesse em utilizar tubos de secção circular. A vibração transversal livre dum tubo, infinitamente estreito, é descrita pela equação diferencial (cf. *Timoshenko*, 1955, p. 324 e seg.)

$$IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - A \varrho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{13}$$

onde y é o desvio vertical à distância x de um dos extremos, t é o tempo, ϱ a densidade, A a área da secção, E o módulo de Young e I o momento de inércia da secção em relação a um diâmetro. Sendo, respectivamente, d_e e d_i os diâmetros exterior e interior dos tubos, virá

$$A = \pi (d_e^2 - d_i^2)/4 \quad \text{e} \quad I = \pi (d_e^4 - d_i^4)/64 \tag{14}$$

Se nos extremos do tubo não actuarem forças exteriores, as condições nos limites são

$$\partial^2 y / \partial x^2 = o \text{ para } x = o \text{ e } x = l \qquad (15)$$

$$\partial^3 y / \partial x^3 = o \text{ para } x = o \text{ e } x = l \qquad (16)$$

onde l é o comprimento do tubo.

O período da vibração é

$$\tau = \frac{2 \pi l^2}{\beta^2} \sqrt{\frac{A \varrho}{IE}} \qquad (17)$$

sendo β uma solução de

$$\cos \beta \ \cosh \beta = 1 \qquad (18)$$

Para o modo fundamental é $\beta = 4{,}730$ e para a 2.ª harmónica $\beta = 7{,}853$.

A equação (17) permite calcular E. Para um tubo real (de secção não nula) será

$$E = C \frac{4 \pi^2 l^4 A \varrho}{\beta^4 I \tau^2} \qquad (19)$$

sendo C um factor de correcção que se pode representar, com suficiente aproximação, pela fórmula empírica

$$C = 1 + k / l^2 \qquad (20)$$

onde k é uma constante (que depende do material do tubo e da secção transversal).

Para tubos do mesmo material e com a mesma secção C/E é uma função linear de $1/l^2$, o que permite determinar còmodamente o módulo E.

Se o tubo estiver cheio com uma substância de viscosidade suficientemente elevada para vibrar como um sólido, será

$$(I_t E_t + I_a E_a) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -(A_t \varrho_t + A_a \varrho_a) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (21)$$

onde agora o índice t se refere ao tubo e o índice a à amostra que constitui o enchimento.

Para o tubo cheio pode determinar-se um módulo equivalente, usando a equação (19) onde se fará

$$A = A_t + A_a, \ I = I_t + I_a \text{ e } \varrho = \frac{1}{A} (A_t \varrho_t + A_a \varrho_a) =$$

$$= \left(1 - \frac{d_i^2}{d_e^2}\right) \varrho_t + \frac{d_i^2}{d_e^2} \varrho_a \qquad (22)$$

sendo evidentemente

$$IE = I_t E_t + I_a E_a \text{ ou } d_e^4 E = (d_e^4 - d_i^4) E_t + d_i^4 E_a \qquad (23)$$

O módulo E_a pode obter-se desta equação. O valor só é, porém, verdadeiro se forem iguais os coeficientes de Poisson dos tubos e do enchimento. No caso contrário, o valor determinado é aparente (sendo representado, no que se segue, por E_a *).

Se forem σ_r e σ_z as tensões radial e longitudinal no material do enchimento e ε_r e ε_z as dilatações lineares correspondentes, o equilíbrio elástico implica o seguinte sistema de equações (*Timoshenko*, 1940, p. 62; 1941, p. 241)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_a} [(1 - \nu_a) \sigma_r - \nu_a \sigma_z] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_a} (\sigma_z - 2 \nu_a \sigma_r) \\ \varepsilon_r &= -\gamma \varepsilon_z = -\frac{\sigma_r}{E_t} \left(\frac{d_e^2 + d_i^2}{d_e^2 - d_i^2} + \nu_t \right) = \nu_t \varepsilon_z \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

onde os ν ν são coeficientes de Poisson.

Eliminando σ_r e ε_r obtemos

$$\sigma_z = \frac{E_a [1 - (1 + 2\gamma) \nu_a]}{(1 - 2 \nu_a)(1 + \nu_a)} \varepsilon_z = E_a^* \varepsilon_z$$

donde se deduz (por ser $2 \mu_a = E_a / (1 + \nu_a)$)

$$\nu_a = \frac{E_a^* - 2 \mu_a}{2 [E_a^* - (1 + 2\gamma) \mu_a]} \qquad (26)$$

com

$$\gamma = \nu_t \ (1 + B \nu_a / \nu_t) / (1 + B) \qquad (27)$$

e

$$B = \frac{E_a}{E_t (1 - 2 \nu_a)(1 + \nu_a)} \left(\frac{d_e^2 + d_i^2}{d_e^2 - d_i^2} + \nu_t \right) \qquad (28)$$

Na prática, $\gamma = \nu_t$ é, em regra, uma boa aproximação.

Para as vibrações em torção teremos anàlogamente (*Timoshenko*, 1955, p. 318 e seg.)

$$I' \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = I' \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (29)$$

sendo agora φ o ângulo de rotação à distância x de um dos extremos, μ o módulo de rigidez (ou de elasticidade transversal) e I' o momento de inércia polar (em relação ao centro da secção) que é

$$I' = 2I = \pi (d_e^4 - d_i^4) / 32 \qquad (30)$$

Para extremos livres, as condições nos limites são

$$\partial \varphi / \partial x = o \quad \text{para} \quad x = o \quad \text{e} \quad x = l \tag{31}$$

O período desta vibração é

$$\tau = 2 l \sqrt{\rho / \mu} \quad \text{donde} \quad \mu = 4 \rho l^2 / \tau^2 \tag{32}$$

Para o tubo cheio vem agora

$$(I_t \mu_t + I_a \mu_a) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (I_t \rho_t + I_a \rho_a) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{33}$$

donde se deduz, com $I = I_t + I_a$,

$$I \mu = I_t \mu_t + I_a \mu_a \quad \text{ou} \quad d_e^4 \mu = (d_e^4 - d_i^4) \mu_t + d_i^4 \mu_a \tag{34}$$

sendo μ a rigidez equivalente do tubo cheio que se obtém da equação (32) fazendo

$$\rho = \frac{1}{I} (I_t \rho_t + I_a \rho_a) = \left(1 - \frac{d_i^4}{d_e^4}\right) \rho_t + \frac{d_i^4}{d_e^4} \rho_a \tag{35}$$

A equação (34) permite naturalmente determinar μ_a. Conhecidos E_a^* e μ_a obtém-se, pela equação (26), o coeficiente de Poisson ν_a, e depois, utilizando as equações conhecidas, o módulo de Young (verdadeiro) E_a e o módulo de compressão χ_a

$$E_a = 2 \mu_a (1 + \nu_a) \tag{36}$$

$$\chi_a = E_a / (3 - 6 \nu_a) \tag{37}$$

Para materiais granulares há interesse em usar pequenas tampas nos extremos dos tubos.

Por analogia com barras com discos nos extremos (cf. *Timoshenko*, 1955, p. 319 e seg.) os períodos τ_t ou τ_{ta} dos tubos sem tampas, respectivamente vazios ou cheios, estão relacionados com os correspondentes períodos dos tubos com tampas (τ_{tt} ou τ_{tta}) pelas expressões aproximadas

$$\left.\begin{aligned} \tau_t^2 &= \tau_{tt}^2 / (1 + \varepsilon / A_t \rho_t) \\ \tau_{ta}^2 &= \tau_{tta}^2 / [1 + \varepsilon / (A_t \rho_t + A_a \rho_a)] \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

para as vibrações em flexão; e

$$\left.\begin{aligned} \tau_t^2 &= \tau_{tt}^2 / (1 + \varepsilon' / (I_t \rho_t) \\ \tau_{ta}^2 &= \tau_{tta}^2 / [1 + \varepsilon' / I_t \rho_t + I_a \rho_a)] \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

para as vibrações em torção.

As constantes ε ou ε' (para cada tubo) são grandezas pequenas desde que as tampas sejam ligeiras. É evidentemente possível eliminar ε e ε' nas equações (38) e (39).

O resultado pode exprimir-se dizendo que os valores equivalentes E/C, para os tubos cheios (sem tampas), podem ser obtidos da equação (19) usando o período correspondente aos tubos cheios e com tampas, desde que se substitua a densidade pelo valor

$$\rho = \left(1 - \frac{d_i^2}{d_e^2}\right) \frac{\tau_{tt}^2}{\tau_t} \rho_t + \frac{d_i^2}{d_e^2} \rho_a \tag{40}$$

em vez do valor dado por (22).

Anàlogamente, a rigidez μ do tubo cheio (sem tampas) pode ser calculada por (32) com o período medido com tampas, fazendo, em vez de (35), a substituição

$$\rho = \left(1 - \frac{d_i^4}{d_e^4}\right) \frac{\tau_{tt}^2}{\tau_t^2} \rho_t + \frac{d_i^4}{d_e^4} \rho_a \tag{41}$$

Para estudar o amortecimento, a vibração dos tubos pode representar-se por uma elongação proporcional à parte real de

$$e^{2 \pi i t / \tau} \tag{42}$$

O efeito de imperfeições de elasticidade obtém-se fàcilmente substituindo em (17) ou (32), e depois em (42),

$$E = E_o (1 + i / Q_E) \tag{43}$$

ou

$$\mu = \mu_o (1 + i / Q) \tag{44}$$

sendo

$$\frac{1}{Q_E} = \frac{2 (1 + \nu)}{3} \frac{1}{Q} \tag{45}$$

que se deduz de $E = 9 \chi \mu / (3 \chi + \mu)$, supondo $1/Q$ suficientemente pequeno para, depois da substituição (44), se poderem desprezar os respectivos quadrados (χ, como se disse, não é afectado pelas imperfeições de elasticidade).

O resultado é o aparecimento de factores de amortecimento $e^{-\pi t / \tau_o Q_E}$ ou $e^{-\pi t / \tau_o Q}$ (τ_o corresponde a E_o ou μ_o, respectivamente). Numa oscilação forçada com estes amortecimentos a amplitude da vibração é proporcional a (cf. *Timoshenko*, 1955, p. 78)

$$\left[\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau_o^2}\right)^2 + \frac{1}{\tau^2 \tau_o^2} \frac{1}{Q_E^2}\right]^{-1/2} \tag{46}$$

ou a uma expressão análoga em $1/Q$, τ_o sendo agora o período de ressonância e τ o período da excitação.

A amplitude é reduzida a $1/\sqrt{2}$ do máximo para valores de τ (de ambos os lados de τ_o) dados aproximadamente por

$$2 \, | \tau - \tau_o | / \tau_o \cong 1 / Q_E \tag{47}$$

onde se admitiu que τ é vizinho de τ_o; há evidentemente uma expressão análoga para $1/Q$ (vibração em torção).

Isto dá um método para determinar $1/Q_E$ ou $1/Q$, reduzindo de $1/\sqrt{2}$ a amplitude exibida no osciloscópio (para ambos os lados de cada ressonância) e medindo os períodos correspondentes.

Substituindo agora em (23) e (34) expressões análogas a (43) e (44) para os tubos e para o enchimento, obtém-se (igualando as partes imaginárias)

$$d_e^4 \, E_o / Q_t = (d_e^4 - d_i^4) \, E_{ot} / Q_{Et} + d_i^4 \, E_{oa} \, Q_{Ea} \qquad (48)$$

$$d_e^4 \, \mu_o / Q = (d_e^4 - d_i^4) \, \mu_{ot} / Q_t + d_i^4 \, \mu_{oa} \, Q_a \qquad (49)$$

equações que permitem determinar $1/Q_{Ea}$ e $1/Q_a$ conhecidas as restantes grandezas.

O efeito da suspensão que tanto afecta $1/Q_E$ com $1/Q_{Et}$ (e é proporcional, em cada caso, a $1/IE_o$ ou a $1/I_t \, E_{ot}$) fica eliminado na subtracção. O mesmo acontece em relação a $1/Q$ e $1/Q_t$.

Na prática, para as vibrações em flexão, determinam-se (em vez de E_{oa}/Q_{Ea}) valores aparentes E_{oa}^* / Q_{Ea}^* que se podem transformar pela expressão aproximada

$$\mu_{oa} / Q_a \simeq [(3/4) / (1 + \nu_t)] \; E_{oa}^* / Q_{Ea}^* \qquad (50)$$

Isto resulta de ser

$$E_a^* = (1 - 2\gamma) \, \gamma_a + (4/3) \, (1 + \gamma) \, \mu_a \qquad (51)$$

onde se pode fazer $\gamma = \nu_t$ e desprezar a parte imaginária de ν_t (o que é uma razoável aproximação porque o amortecimento dos tubos é, em geral, pequeno, comparado com o do enchimento).

3. APLICAÇÃO AO ESTUDO DUMA AREIA

Utilizou-se areia artificial preparada com mármore de Estremoz; aproveitou-se a fracção que passava no peneiro n.º 10 e era retida no n.º 35. A densidade deste mármore é 2,695 g/cm³.

Usaram-se quatro tubos de aço inoxidáxel com as dimensões e densidades indicadas na Tabela 1. As tampas eram de plástico e encaixavam bastante justas.

Para cada tubo (sem tampas) mediram-se os períodos das ressonâncias fundamental e 2.ª harmónica em flexão, e fundamental em torção. Com esses períodos calcularam-se, pelas equações (19) e (32), os valores E/C e μ que constam da Tabela 2.

Na Fig. 3 representaram-se as grandezas C/E em função de $1/l^2$; como era de esperar, os pontos definem duas rectas cujo ajustamento pelos mínimos quadrados permitiu determinar o módulo E. Para μ adoptou-se a média aritmética dos valores da Tabela 2. Os resultados são

$$E = 1{,}956 \pm 0{,}003 \text{ Mb}$$

$$\mu = 0{,}7526 \pm 0{,}0003 \text{ Mb}$$

a que corresponde (usando uma equação análoga a (36)) o coeficiente de Poisson

$$\nu = 0{,}299 \pm 0{,}003$$

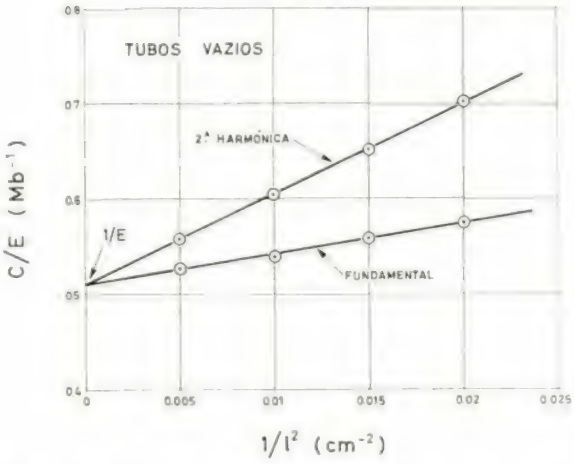


Fig. 3 — Diagrama de C/E (em função de $1/l^2$) para os tubos vazios

Os amortecimentos foram medidos para os tubos com tampas. Os valores apresentavam alguma dispersão mas foram regularizados (usando a teoria desenvolvida noutra parte; *Machado*, artigo no prelo); isto tem, de resto pouca influência nos resultados finais. Os valores adoptados indicam-se na Tabela 3.

Determinaram-se também os períodos de ressonância dos tubos vazios com tampas, para poderem usar-se as equações (40) e (41). A relação τ_{tt} / τ_t (para as tampas utilizadas) variava entre 1,041 e 1,066.

Os tubos encheram-se depois com a areia, a que se deu uma ligeira compactação. A densidade aparente obtida foi, em média, de 1,33 g/cm³, o que corresponde a uma porosidade de cerca de 51 %.

Determinaram-se então as frequências de ressonância dos tubos cheios, as quais pelas equações (19), (32), (40) e (41) conduzem aos valores E/C e μ indicados na Tabela 4.

Na Fig. 4 apresentam-se os valores C/E em funcão

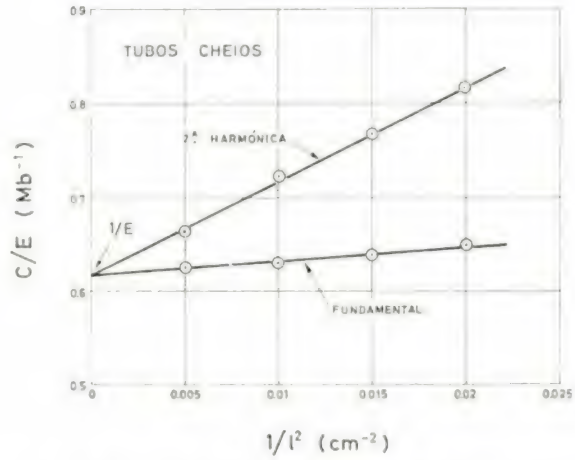


Fig. 4 — Diagrama de C/E (em função de $1/l^2$) para os tubos cheios

de $1/l^2$. Procedendo como para os tubos vazios, obtêm-se os módulos equivalentes

$$E = 1{,}621 \pm 0{,}006 \text{ Mb}$$

$$\mu = 0{,}579 \pm 0{,}002 \text{ Mb}$$

e pelas equações (23) e (34) deduzem-se para a areia

$$E_a^* = 0{,}746 \text{ Mb}$$

$$\mu_a = 0{,}123 \text{ Mb}$$

Este é um valor aparente do módulo de Young. Pela equação (26) pode determinar-se o coeficiente de Poisson

$$\nu_a = 0{,}358$$

e pelas equações (36) e (37)

$$E_a = 0{,}335 \text{ Mb}$$

$$\gamma_a = 0{,}394 \text{ Mb}$$

Conforme veremos, a areia tem comportamento que se pode considerar visco-elástico e por isso μ_a varia com o período de vibração (de acordo com a equação (11), o mesmo sucedendo a E_a e ν_a. Os valores apresentados representam, de certo modo, médias no intervalo dos períodos de ressonância utilizados. O módulo γ_a calculado pode, porém, ser vizinho do valor verdadeiro (se E_a^* e μ_a corresponderem sensivelmente a um mesmo período de vibração).

Os amortecimentos dos tubos cheios (e os respectivos períodos) vão indicados na Tabela 5. Não foi possível medir $1/Q$ (ou $1/Q_E$) em muitas das ressonâncias, ou por ser muito pequena a amplitude da vibração, ou por haver sobreposição doutras ressonâncias anómalas (que resultam certamente da heterogeneidade da areia e eventualmente de efeitos da suspensão).

Dos valores medidos obtiveram-se pelas equações (48), (49) e (50) os produtos μ_{oa}/Q_a que permitiram representar na Fig. 5 $Q/\mu\tau$ em função de $1/\tau^2$. Os

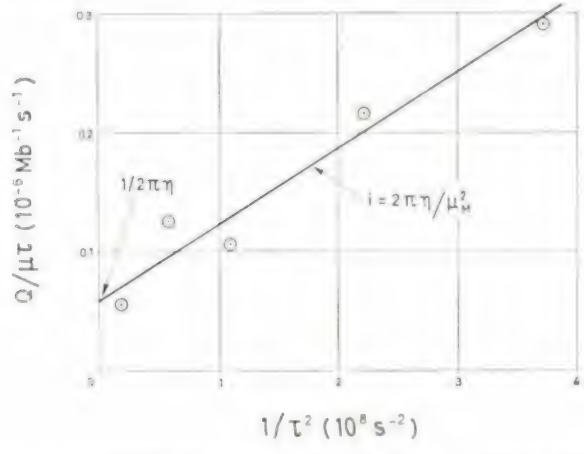


Fig. 5 — Diagrama de $Q/\mu\tau$ (em função de $1/\tau^2$) para a areia

pontos definem razoàvelmente uma recta de inclinação finita e não nula, o que mostra que o comportamento reológico da areia pode ser descrito, dentro da aproximação adoptada, pelo modelo visco-elástico de Maxwell.

Um ajustamento pelos mínimos quadrados permite calcular a ordenada na origem e a inclinação, e a partir destes valores os parâmetros de Maxwell (cf. Fig. 5)

$$\mu_M = 0{,}16 \pm 0{,}03 \text{ Mb}$$

$$\eta = (2{,}7 \pm 0{,}7) \times 10^6 \text{ poises}$$

O tempo de relaxação correspondente é da ordem de 10^{-4} s apenas; por isso, mesmo para solicitações de duração relativamente curta, as areias escoam como líquidos viscosos.

Com os parâmetros obtidos é possível determinar, para os vários períodos de vibração, valores de μ_o dados por (11). Na Fig. 6 a curva teórica de variação de μ_o

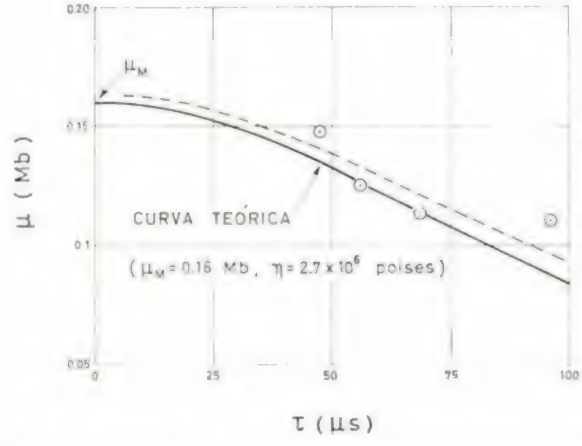


Fig. 6 — Diagrama de μ em função de τ, para a areia. A curva representa a variação teórica (a curva tracejada corresponderia a $\mu_M = 0{,}165$ Mb, $\eta = 3{,}0 \times 10^6$ poises)

é comparada com os valores μ_a obtidos directamente da Tabela 4, aplicando a cada medida de μ a equação (34). Os pontos acompanham razoàvelmente a curva (que é de resto, afectada pela incerteza de μ_M e η), o que está também de acordo com o modelo visco-elástico considerado.

4. CONCLUSÕES

Conforme era certamente de esperar, o comportamento da areia ensaiada pode ser descrito, com razoável aproximação, pelo modelo visco-elástico de Maxwell. Os respectivos parâmetros reológicos são

$$\gamma = 0{,}39 \text{ Mb}$$

$$\mu_M = 0{,}16 \text{ Mb}$$

$$\eta = 2{,}7 \times 10^6 \text{ poises}$$

O método usado parece suficientemente simples para ter interesse prático em problemas de Mecânica dos Solos.

Agradecimentos

O presente estudo foi efectuado no laboratório do Agrupamento Científico de Geologia da Universidade de Lisboa (Junta de Investigações do Ultramar) e beneficiou dum subsídio do Instituto de Alta Cultura (Projecto de Investigação LMG-3).

Para o trabalho foi muito útil um estágio feito por um dos autores (F. Machado) na Universidade de Oxford em colaboração com o Dr. N. Gale.

Os autores agradecem também ao Eng. J. Brito Folque a leitura crítica do manuscrito.

Referências

Jaeger, J. C., (1956) *Elasticity, Fracture and Flow.* Methuen, Londres.

Machado, F., (no prelo) Estudo reológico duma lava do vulcão do Fogo (Cabo Verde). *Garcia de Orta.*

Spinner, S., & Tefft, W. E., (1961) A method for determining mechanical resonance frequencies and for calculating elastic moduli from these frequencies. *Proc. A. S. T. M.*, vol. 61, pp. 1221-1238.

Timoshenko, S., (1940) *Strength of Materials*, 2nd ed., vol. 1. Van Nostrand, Nova Iorque.

(1941) Idem, idem, vol. 2.

(1955) *Vibration Problems in Engineering*, 3rd ed. Van Nostrand, Nova Iorque.

TABELA 1

Dimensões e densidades dos tubos

	Comprimento (cm)	Diâm. ext. (cm)	Diâm. int. (cm)	Densidade (g/cm^3)
Tubo A	7,0698	0,8031	0,5821	7,946
Tubo B	8,1582	0,8033	0,5824	7,970
Tubo C	10,0024	0,8025	0,5823	7,952
Tubo D	14,1190	0,8020	0,5811	7,923

TABELA 2

Constantes elásticas dos tubos (vazios)

	E/C, fund. (Mb)	E/C, 2.ª harm. (Mb)	μ, fund. (Mb)
Tubo A	1,748	1,431	0,7522
Tubo B	1,793	1,535	0,7532
Tubo C	1,851	1,654	0,7519
Tubo D	1,899	1,789	0,7531

TABELA 3

Amortecimentos 1/Q dos tubos vazios com tampas

	$1/Q_E$, fund. (10^{-3})	$1/Q_E$, 2.ª harm. (10^{-3})	1/Q, fund. (10^{-3})
Tubo A	1,109	1,004	1,166
Tubo B	1,171	1,008	1,169
Tubo C	1,320	1,021	1,174
Tubo D	1,910	1,070	1,186

TABELA 4

Constantes elásticas (equivalentes) dos tubos cheios de areia

	E/C, fund. (Mb)	E/C, 2.ª harm. (Mb)	μ, fund. (Mb)
Tubo A	1,537	1,227	0,586
Tubo B	1,565	1,308	0,579
Tubo C	1,584	1,386	0,576
Tubo D	1,597	1,507	0,576

TABELA 5

Amortecimentos 1/Q dos tubos cheios de areia

	Período (μ s)	$1/Q_E$ (10^{-2})	1/Q (10^{-2})
Tubo B	51,8	—	3,27
Tubo C	67,1	—	3,41
Tubo C	96,0	3,04	—
Tubo A	129,7	1,92	—
Tubo C	250,1	2,25	—

QUANTO MAIS
FORMOS CONHECIDOS
MAIS SEREMOS
APRECIADOS

O certo é que contribuimos para que um sem número de produtos e serviços básicos vos cheguem às mãos eficientemente.

A luz eléctrica, o gás, a gasolina, os óleos, o aço, o cimento, o papel e até o próprio avião estão de certa forma ligados à nossa empresa. É que ajudamos a construir e a criar indústrias e serviços de base.

Para o grande público talvez sejamos anónimos, mas para o desenvolvimento industrial do país somos indispensáveis.
E porque servindo eficientemente o país também o servimos a si,
gostaríamos que nos conhecesse melhor.

Sabia por exemplo que construímos e montamos as blindagens do túnel e da chaminé de equilibrio e a conduta forçada de Vilarinho das Furnas, com o peso total de 2.500 toneladas? E doravante sempre que passar por uma barragem ou uma central eléctrica... talvez se lembre do nosso nome.

Sepsa

servindo eficientemente o país, também o servimos a si...

Sepsa

SOCIEDADE DE CONSTRUÇÕES ELECTROMECÂNICAS, S.A.R.L.

TELEF. [illegible] (10 LINHAS)

APARTADO [illegible] – LOCA DO RAIO – TELEX [illegible]

C. D. U. 666.942

MICROSCOPIA QUANTITATIVA DE CLÍNQUERES E CIMENTOS PORTLAND

MARIA OLINDA BRAGA
Especialista, Divisão de Química LNEC

RESUMO

A microscopia óptica com luz reflectida apresenta grande interesse no estudo do clínquer e do cimento portland pelo seu duplo aspecto:

- *Qualitativo, facultando a observação directa da estrutura e textura dos grãos de clínquer.*
- *Quantitativo, possibilitando a determinação directa das proporções dos seus constituintes.*

No presente trabalho, após breve revisão dos aspectos fundamentais respeitantes à composição do clínquer e análise microscópica qualitativa, descreve-se a técnica de determinação quantitativa das fases pelo método de contagem de pontos com uma ocular integradora de retículo de pontos.

SYNOPSIS

The reflected light optical microscopy is of great interest for the study of clinker and portland cement, both from the qualitative viewpoint since it allows the examination of the structure and texture of the clinker grains, and from the quantitative viewpoint as it is possible to determine the proportions of its constituents.

In the present work, after a brief review of the fundamental aspects related to clinker composition and to qualitative microscopic analysis, a description is made of the technique of quantitative determination of phases by the point counting method using a integrating eyepiece with point grid.

1 — INTRODUÇÃO

A microscopia óptica pode considerar-se já como uma técnica tradicional na análise de cimentos. Le Chatelier (1882), pela primeira vez, observou o silicato tricálcico numa lâmina delgada de clínquer com um microscópio polarizante e depois Tornebohm (1897) identificou e descreveu os constituintes mineralógicos principais do clínquer. O método por ataque selectivo em secções polidas de grão de clínquer só foi aperfeiçoado mais tarde por Tavasci (1934) e Insley (1936). Desde então, o microscópio metalográfico tem sido utilizado com o máximo interesse e êxito na investigação e no controle industrial do cimento portland.

O exame microscópico do clínquer informa sobre a espécie, formação e repartição das fases e fornece indicações importantes sobre os fenómenos que podem ocorrer no decurso da fabricação do clínquer e preparação do cimento. O emprego duma platina ou ocular integradoras faculta ainda, por um processo de contagem mineralógica, uma determinação quantitativa directa dos constituintes integrantes do material.

Foi já objecto dum relatório do LNEC um estudo microscópico qualitativo de clínqueres e cimentos nacionais [3]. Por isso, no presente trabalho, apenas se passarão em revista alguns aspectos fundamentais da microscopia qualitativa, descrevendo-se mais em pormenor o processo de determinação quantitativa por contagem de pontos com ocular integradora, recentemente adquirida.

2 — CONSTITUIÇÃO MINERALÓGICA DO CLÍNQUER DE CIMENTO PORTLAND

O clínquer pode considerar-se como uma rocha artificial cuja formação se deve a um conjunto de reacções em estado sólido com fusão parcial dos componentes. O cimento portland é um ligante hidráulico resultante da mistura de clínquer e gesso finamente moídos. A composição das fases do clínquer, a estrutura dependente da velocidade de arrefecimento e a finura, entre outras propriedades, definem em grande medida o comportamento do cimento.

Os constituintes mineralógicos, ou fases, normais no clínquer podem incluir-se em três grupos distintos:

1 — Silicatos, em cristais bem formados, que não chegaram a fundir durante o período de clinquerização.

2 — Fase intersticial, correspondente à fase fundida à temperatura de clinquerização, no seio da qual cristalizaram os silicatos e que portanto solidificou posteriormente àqueles. Esta fase aglutina os cristais dos silicatos.

3 — Óxidos, grupo menor que forma inclusões nos grupos anteriores

O 1.° e 2.° grupos incluem os chamados constituintes principais do clínquer: alite, belite, aluminato e ferrite.

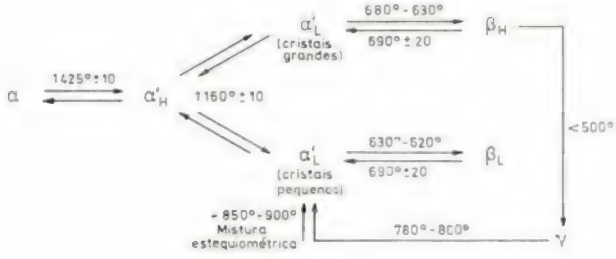
2.1 — *Silicatos*

Neste grupo estão a alite e a belite, as fases existentes em maior proporção.

Por «alite» designam-se as diferentes modificações do silicato tricálcico estabilizadas no clínquer industrial por formação de soluções sólidas com inclusão de pequenas quantidades de óxidos estranhos (MgO, Al_2O_3, Fe_2O_3, TiO_2, P_2O_5, SO_3 ...). Conhecem-se actualmente 6 formas alotrópicas do C_3S (1 trigonal, 2 monoclínicas e 3 triclínicas) identificáveis por difracção de raios X e análise térmica diferencial, de estruturas cristalinas muito semelhantes, vizinhas da forma trigonal estável a alta temperatura [4, 5, 18].

A alite corresponde ao C_3S do processo de cálculo da composição potencial. Ocorre normalmente em cristais idiomórficos, pseudo-hexagonais, de bordos por vezes corroídos, denunciando reacção com a fase líquida, mais ácida, durante o arrefecimento do clínquer, frequentemente com inclusões de belite (fig. 1). A alite só é estável acima de cerca de 1200°C e por isso, com um arrefecimento muito lento, pode decompor-se em belite secundária e cal livre secundária ($C_3S \rightarrow C_2S + C$). A velocidade de decomposição é lenta e portanto aquela não se dá, em geral, durante o processo de arrefecimento industrial. Não obstante, a inclusão de certos iões estranhos, como o Fe^{2+}, pode acelerar a reacção e reconhecem-se ao miscroscópio associações de belite e cal pseudomórficas com a alite, muitas vezes com restos de alite não decomposta (fig. 2).

Belite é o nome dado ao silicato dicálcico presente no clínquer. Conhecem-se 4 variedades alotrópicas do C_2S, α, α', β e γ, estáveis em domínios de temperatura determinados, as quais apresentam estruturas cristalinas nìtidamente diferentes. Podem representar-se esquemàticamente as transformações do C S do seguinte modo [6]:



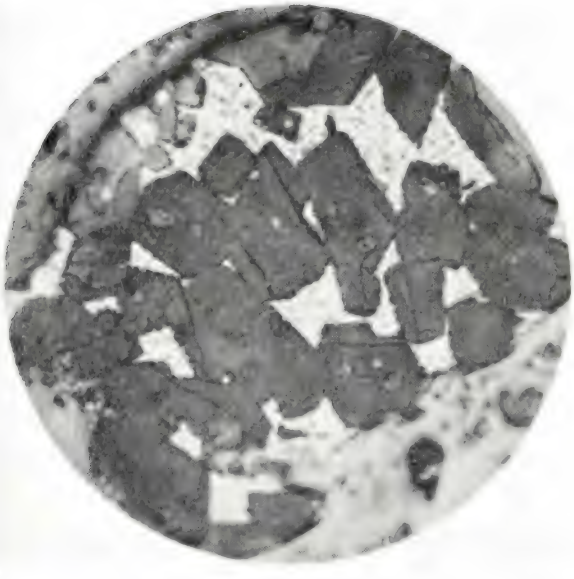


Fig. 1 — Ataque nital 400 ×
Cristais de alite de bordos ligeiramente corroídos e com inclusões de belite

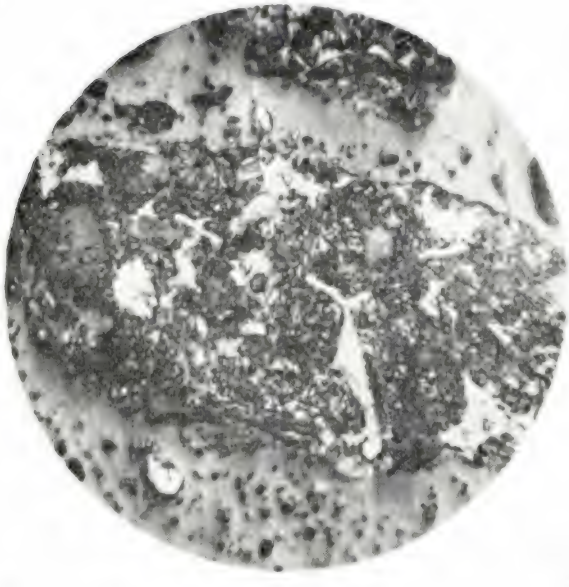


Fig. 2 — Ataque nital 400 ×
Alite decomposta. Reconhecem-se os contornos primitivos e notam-se ainda restos de alite não decomposta

A belite do clínquer corresponde a um C_2S-β de rede cristalina ligeiramente modificada pela inclusão de óxidos em solução sólida (MgO, BaO, Mn_2O_3, Cr_2O_3, K_2O, Na_2O, SiO_2, SO_3 ...).

O aspecto dos cristais varia bastante com a composição e as condições de cozedura. Normalmente ocorre em grãos arredondados com estriação cruzada característica (fig. 3 e 4).

A magnésia participa na formação da fase fundida e entra em solução sólida nas diferentes fases descritas, mas para teores em MgO superiores a cerca de 2% cristaliza independentemente como periclase.

A cal livre (primária) resulta quase sempre de deficiências de homogeneização do cru e por vezes duma sobredosagem em cal.

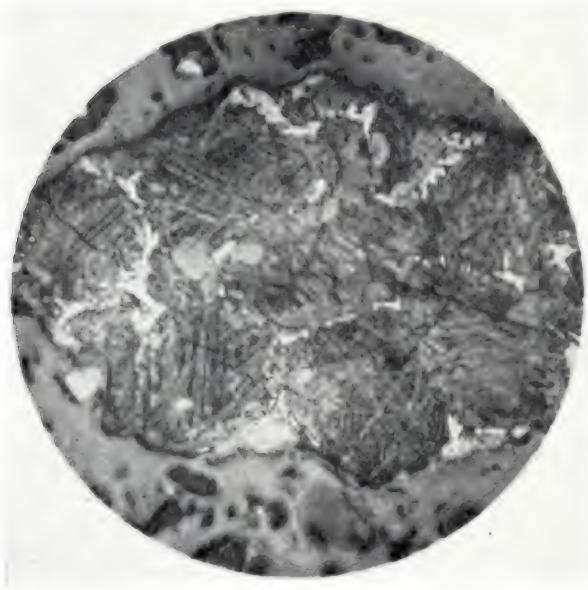


Fig. 3 — Ataque nital 400 ×
Belite estriada denotando tendência para a forma «dedo de luva»

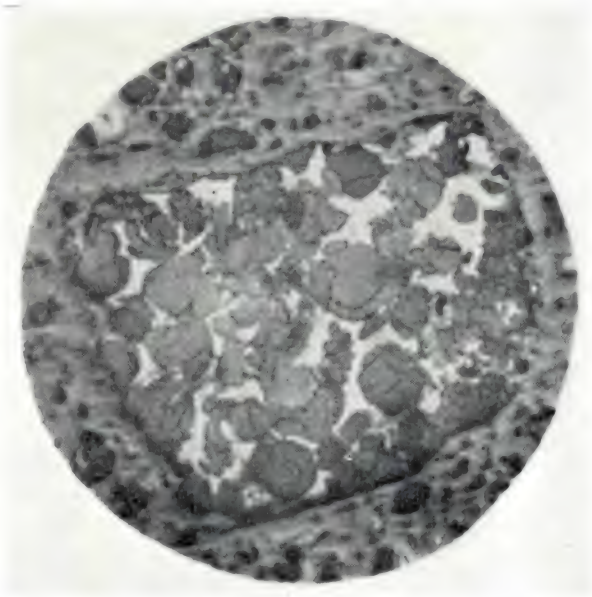


Fig. 4 — Ataque nital 400 ×
Cristais lisos e irregulares de belite

2.2 — *Fase intersticial*

Engloba as duas fases cristalinas designadas correntemente por aluminato tricálcico (C_3A) e aluminoferrato tetrálcico, ou simplesmente ferrite (C_4AF). Na realidada cada um destes constituintes pode diferir da composição estequiométrica, quer por proporções variáveis de A e F, quer por introdução de impurezas em solução sólida [4, 5, 18].

O aluminato tricálcico, quando bem diferenciado na fase intersticial, apresenta-se em cristais irregulares ou pseudocúbicos. Cristais idiomórficos alongados, incorrectamente designados por «fase prismática», são atribuídos a uma fase alcalina de fórmula NC_8A_3.

A fase ferrite corresponde a um termo duma solução sólida de fórmula geral $C_2A_xF_{1-x}$. A composição desta fase nos clínqueres depende do tratamento térmico e da relação A/F. A forma mais estável parece ser o C_4AF. Esta fase distingue-se bem pelo seu elevado poder reflector (fase intersticial clara) (fig. 5).

2.3 — *Óxidos*

No clínquer podem aparecer, como constituintes acessórios, periclase e cal livre (fig. 5 e 6).

3 — PREPARAÇÃO DAS AMOSTRAS PARA ANÁLISE MICROSCÓPICA

Uma escolha criteriosa da amostra tem naturalmente uma importância primordial dado que esta deve ser representativa do material a ensaiar.

Realiza-se uma primeira amostragem, como é indicado para a análise química, sobre a amostra de material recebido para ensaio a fim de obter porções mais pequenas destinadas a observação microscópica.

A amostra de cimento assim obtida é utilizada tal qual para a confecção dos provetes. A amostra de clínquer é primeiro britada muito cuidadosamente até um tamanho de grão inferior a 2,38 mm (fracção que passa no peneiro n.º 8 ASTM). Durante a britagem deve evitar-se considerável formação de pó, fazendo peneirações frequentes.

Para a preparação dos provetes, o material deve ser transformado, por impregnação num meio próprio, num produto compacto e duro que não se desagregue durante as operações de desbaste e polimento, indispensáveis para obter secções bem polidas aptas ao exame microscópico em luz reflectida.

Pode encontrar-se uma descrição pormenorizada dos diferentes processos de impregnação, polimento e ataque das superfícies na bibliografia citada [7, 8, 9].

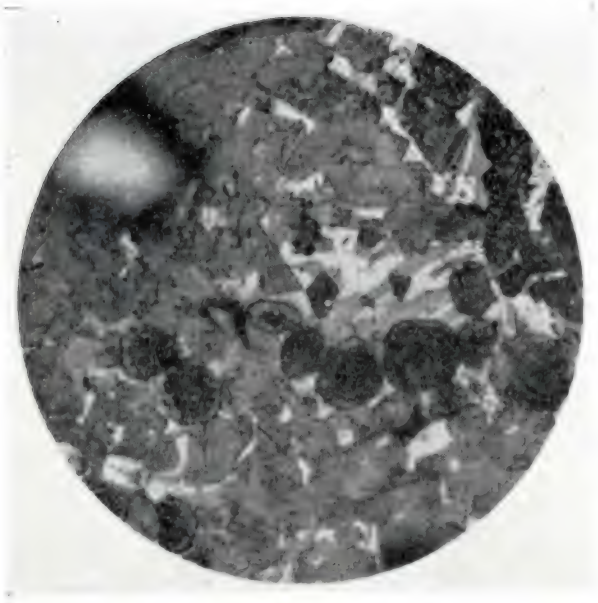


Fig. 5 — Ataque nital 400 ×
Zona alítica com cal livre, ferrite e aluminato «prismático»

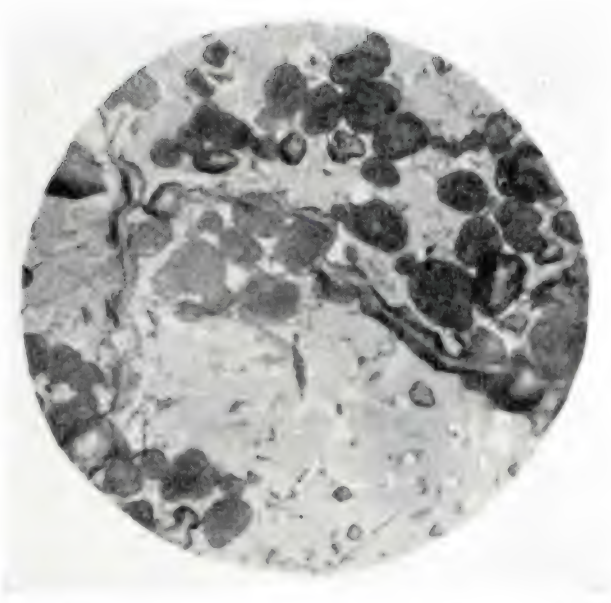


Fig. 6 — Ataque água 315 ×
Cal livre

Em linhas gerais o modo operatório adoptado é o seguinte:

1 — Impregnação de pequena quantidade da amostra do material em resina sintética Stratyl A 116 e catalisador Butanox, em pequenos tubos cilíndricos de vidro (⌣ 2 cm. ∅). Para o clíquer, esta operação é realizada num exsicador de vácuo para auxiliar a libertação do ar ocluso nos poros dos grãos. Os tubos são deixados na estufa a 40 °C durante 24 h.

2 — O vidro dos tubos é partido e o fundo dos provetes é sujeito a desbaste em lixas de esmeril de granulometrias sucessivamente decrescentes: 3; 2; 1; 0/0; 3/0; 4/0, até se obter uma superfície plana e pràticamente isenta de riscos.

3 — Polimento preliminar com pasta de diamante «Hyprez» de graus 6-, 1-, 1/4-OS sobre panos de polir próprios adaptados ao disco duma polidora mecânica, empregando como lubrificante o fluído «Hyprez», tipo OS. Este polimento tem como finalidade conseguir uma superfície polida por corte dos cristais de clínquer sem se originarem deformações dos mesmos.

4 — Polimento final obre um pano de feltro embebido com suspensão de alumina α em álcool absoluto e limpeza final sobre um pano de feltro seco, colocado sobre uma placa de vidro. Por vezes, principalmente no caso do clínquer, mais poroso, o provete é lavado em álcool absoluto, cerca de 2 minutos, num aparelho Ultrasonic mod. 100 L & R, para eliminar o mais possível os resíduos do polimento introduzidos nos poros.

5 — Ataque da superfície polida do provete com reagentes químicos seleccionados para pôr em evidência as características estruturais. As diferentes fases tornam-se visíveis por ataque selectivo ou pela cor que adquirem, dado terem composições químicas diferentes, o que motiva velocidades de ataque diversas. A escolha do reagente é feita de acordo com o objectivo pretendido. Para análise quantitativa mostrou-se mais vantajoso um ataque com água destilada (4-8 seg.) seguido de ataque com nital (3-6 seg.). No quadro 1 estão reunidos os reagentes mais usuais.

QUADRO 1

Reagentes de ataque mais usuais em análise microscópica de clínqueres

Reagentes	Concentração	Tempos de ataque	Acção do ataque
Água destilada	—	2 - 3 seg.	Ataca preferencialmente a cal livre
		> 3 seg.	Começa a atacar as demais fases
Etanol-água	Mistura em partes iguais	1 - 2 min.	Ataca a cal livre
Nital	Solução HNO_3 1 % em etanol	2 - 6 seg.	Reagente universal. Ataca todos os constituintes
Ácido clorídrico	Solução HCl 0,5 % em etanol a 85 %	5 - 15 seg.	Reagente universal. Permite observar detalhes muito finos dos silicatos
Ácido sulfúrico	Solução H_2SO_4 1 % em etanol a 85 %	1 - 2 seg.	Serve para diferenciar a fase intersticial. Ataca de preferência os aluminatos de cálcio
Bórax	Solução 1% em água destilada	5 - 7 min.	Ataca selectivamente a alite e cal livre
Potassa	Solução KOH 10 % em água destilada	15 seg.	Diferencia a fase intersticial

4 — OBSERVAÇÃO MICROSCÓPICA QUALITATIVA

O exame microscópico qualitativo dá a conhecer a estrutura e textura do clínquer e deixa deduzir dos aspectos observados quais as condições experimentais de cozedura e arrefecimento industriais e elucida também sobre o grau de moagem e homogeneização do cru. A miscroscopia permite portanto uma paragénese mineralógica, ou seja, deduzir o processo tecnológico de fabricação do clínquer em função da microestrutura do material [7, 9]. Assim, por exemplo, agrupamentos localizados («ninhos») de cal livre, periclase ou belite, denotam uma granulometria grosseira do calcário, dolomite ou quartzo, resultante em geral duma moagem deficiente das matérias-primas; orlas de belite sobre a superfície dos grãos de clínquer podem indicar um enriquecimento em cinzas ácidas (siliciosas) do combustível; zonas extensas de cristais pequenos juntamente com cal livre são indício de temperatura insuficiente na clinquerização; cristais muito grandes e quase soldados entre si de alite ou belite são característicos de sobrecozidos; fase intersticial bem diferenciada e belite secundária são indicação dum arrefecimento lento do clínquer; fase intersticial de cristais encastrados, sem belite secundária, indica, pelo contrário, um arrefecimento muito rápido (têmpera); com uma atmosfera redutora do forno aparecem nódulos de ferro metálico; etc.

Antes do verdadeiro exame microscópico é interessante, em alguns casos, observar com uma binocular ou lupa as características exteriores gerais dos grãos de clínquer, como forma, aspecto da superfície e cor. Este exame pode designar-se por *macroscopia* do clínquer.

Em relação à observação miscroscópica, podem ainda considerar-se dois aspectos fundamentais:

— *Microscopia de baixa ampliação,* 100 — 300 ×, a qual tem por objectivo obter informações sobre a porosidade e homogeneidade do clínquer e, eventualmente, acção das cinzas do combustível.

— *Microscopia de alta ampliação,* > 300 ×, mediante a qual se observa a microestrutura do clínquer; ampliações maiores (800 - 1000 ×) são em geral utilizadas apenas para o estudo de certos detalhes muito finos dos cristais.

5 — DETERMINAÇÃO QUANTITATIVA DAS FASES

A determinação quantitativa baseia-se na analogia existente entre a proporção em área ocupada pelos diferentes constituintes e a proporção em volume dos mesmos. Para que se possam considerar as percentagens das áreas como percentagens volumétricas é necessário supor um material estruturalmente homogéneo e com os grãos dispostos ao acaso. Assim, no caso de clínqueres com abundância de «ninhos» ou distribuição dos diferentes constituintes em zonas, deve preparar-se uma amostra suficientemente grande. Obtidas as percentagens volumétricas das diferentes fases

multiplicam-se esses valores pelas densidades respectivas (quadro 2) e os produtos expressam-se em percentagens da soma total. A porosidade, exprimir-se-á sempre em percentagem volumétrica.

QUADRO 2

Pesos específicos das fases do clínquer

Fases	Pesos específicos g/ cm^3
C_3S	3,13
C_2S-β	3,28
C_3A	3,04
C_4AF	3,77
CaO	3,35
MgO	3,60

A determinação quantitativa pode efectivar-se de diferentes modos:

— *Por planimetria.* Esta técnica consiste em medir planimètricamente as áreas ocupadas pelos diferentes contituintes sobre fotomicrografias. É naturalmente um processo demasiado moroso e dispendioso pelo elevado número de fotografias que exige e não tem, portanto, significado prático.

— *Por medição de comprimentos — método de Rosiwal.* O método consiste em sobrepor à imagem do clínquer uma escala linear e medir os segmentos seccionados pelas diferentes fases sobre esta escala. Pode empregar-se uma platina integradora equipada com parafusos micrométricos (tipo Leitz) [2, 20] ou uma ocular integradora [21].

— *Por contagem de pontos — método de Gagalov.* Neste método a superfície do provete, convenientemente atacada, é coberta com uma rede uniforme de pontos que acertam com as diferentes fases em casualidade estatística. Contam-se para cada espécie mineral os pontos respectivos e a operação repete-se, noutra posição do provete, até se obter um número total de acertos, ou pontos indicadores, suficientemente grande que garanta uma precisão aceitável. Então, o número de pontos, Pi, contados para a fase Fi, dividido pelo número total de pontos indicadores, P, definirá o teor em volume dessa fase:

$$\% \text{ vol. } F_i = \frac{Pi}{P} \times 100$$

O processo baseia-se assim em cálculos estatísticos. É especialmente útil o emprego duma ocular de integração com rede de pontos [9, 23, 24].

É este último o método actualmente utilizado no LNEC e que, portanto, se descreve mais em pormenor.

5.1 — *Ocular integradora e contador automático de pontos*

Emprega-se uma ocular integradora Zeiss do tipo I, contendo uma rede de 25 pontos dispostos no interior dum círculo que representa o campo de contagem. Este é um pouco menor do que o campo visual da ocular, de modo a que o observador possa apreciar simultâneamente as vizinhanças do campo de contagem (fig. 7).

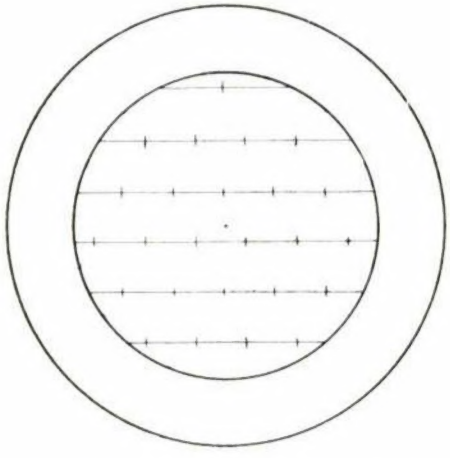


Fig. 7 — Distribuição dos pontos na ocular integradora (Zeiss)

A ocular é constituída por um sistema Kpl 8 × que permite focar, por rotação da lente ocular, a rede de pontos. Quando se emprega um tubo binocular deve montar-se no outro tubo uma ocular normal da mesma ampliação e igualmente corrigida.

O princípio de aplicação da rede é simples, procedendo-se como foi já indicado (fig. 8).

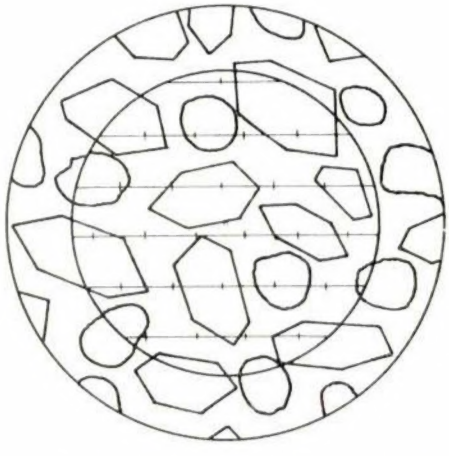
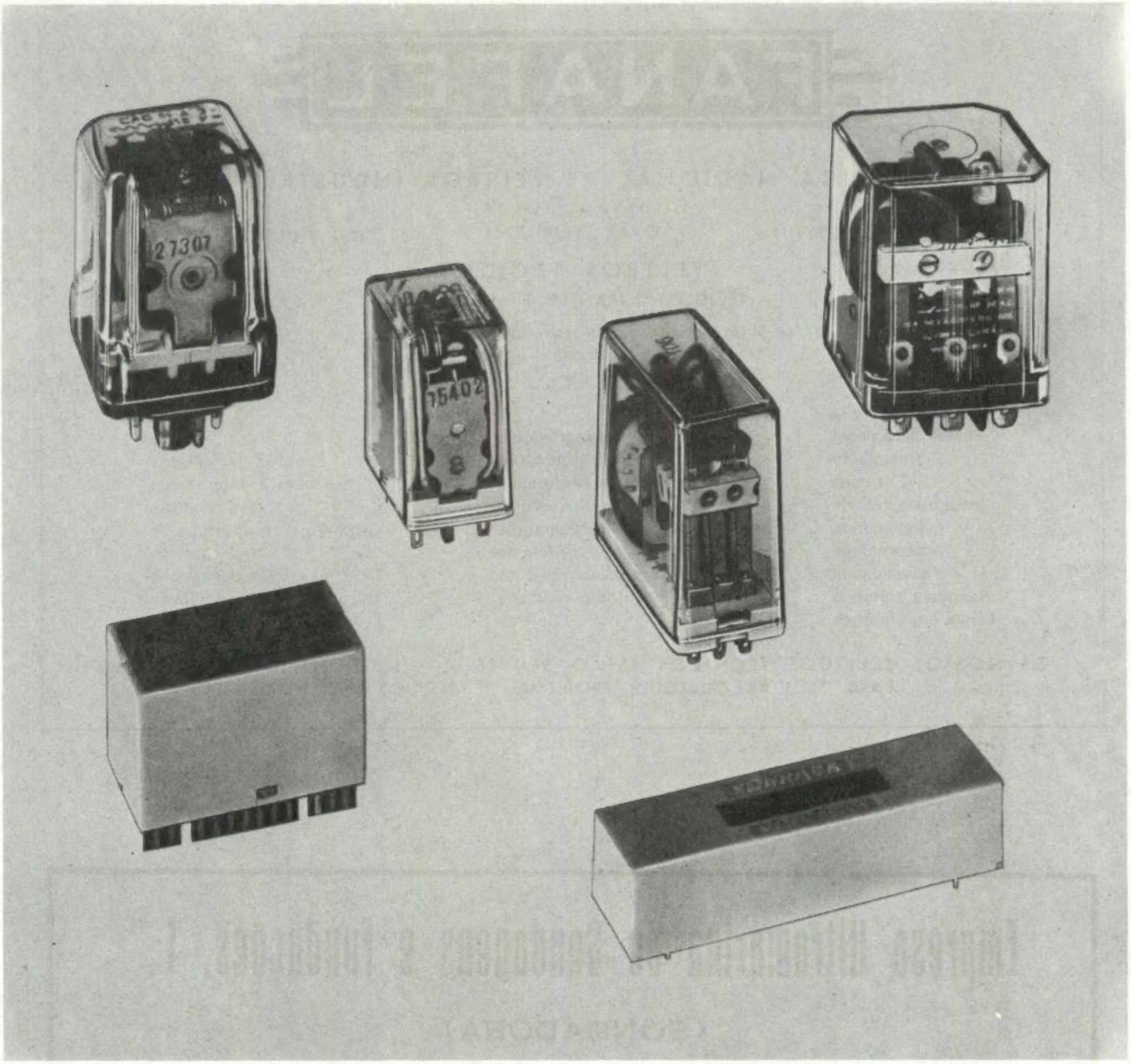


Fig. 8 — Princípio do método por contagem de pontos

As contagens devem fazer-se de maneira a cobrir o mais equitativamente possível toda a secção do provete. As contagens podem simplificar-se por simples rotação da ocular sem deslocar o provete. No entanto



RELÉS DE COMANDO
CC E AC

DE 1·2·4·5 e 10 A
COM 1·2·3·4 e 6 CONTACTOS

SCHRACK

ELECTROTÉCNICOS REUNIDOS Lda.
av. duque de ávila, 66-3º lisboa portugal

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA
TELEF. 5 20 91/2/3 OVAR - PORTUGAL TELEG. FELTROS

FELTROS TECIDOS
TECIDOS FILTRANTES E INDUSTRIAIS
de fibras naturais ou sintéticas, puras ou em mistura
em qualquer formato e dimensão
para

Indústria papeleira
Pastas para papel
Fibrocimento
Curtumes
Industriais têxteis
Estamparia
Acabamentos
Lavandarias
Hospitais e Hotéis
Lonas em sintético

Correias transportadoras
Indústrias químicas
Filtração de água
Cervejas
Refrigerantes
Lacticínios
Azeite e produtos oleosos
Produtos gordurosos
Geleias

Vinhos
Açúcar
Farinhas alimentares
Sabões e detergentes
Cerâmicas
Captação e recuperação de poeiras
Despoeiragens
Tubos de ventilação
etc., etc., etc.

OS NOSSOS SERVIÇOS TÉCNICOS ESTÃO SEMPRE À VOSSA INTEIRA DISPOSIÇÃO PARA ESTUDAR QUALQUER PROBLEMA DE TECIDOS INDUSTRIAIS

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
Tr. do Guarda Mór, 13-r/c
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
R. Francisco Newton, 389/393
C. P. 2178 - Tel. 81 89 7

MOÇAMBIQUE
L. Marques - C. P. 982 - Tel. 74 11 21
Beira - C. P. 1002 - Tel. 71 49 7